Graphes et réseaux

Michel Bierlaire

michel.bierlaire@epfl.ch

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

Réseaux

Réseaux routiers

Réseaux

Réseaux de transports en commun

Réseaux

Réseaux de gaz

Réseaux

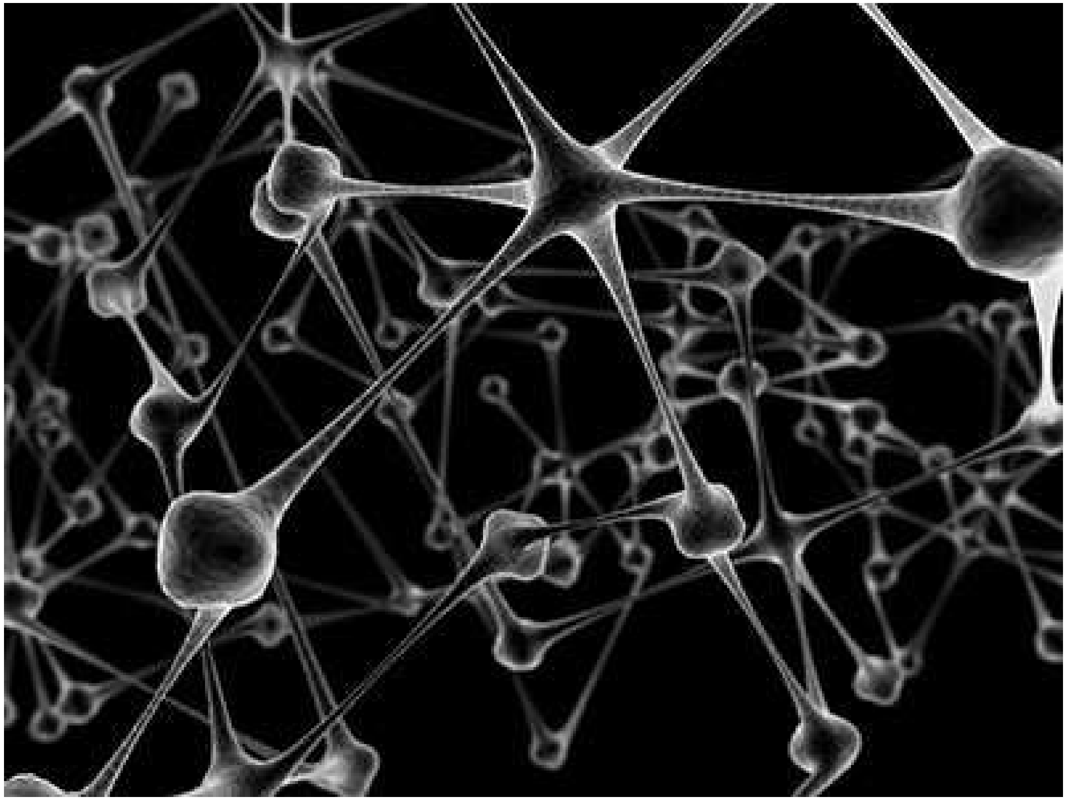
Réseaux d'eau

Réseaux

Réseaux d’ordinateurs

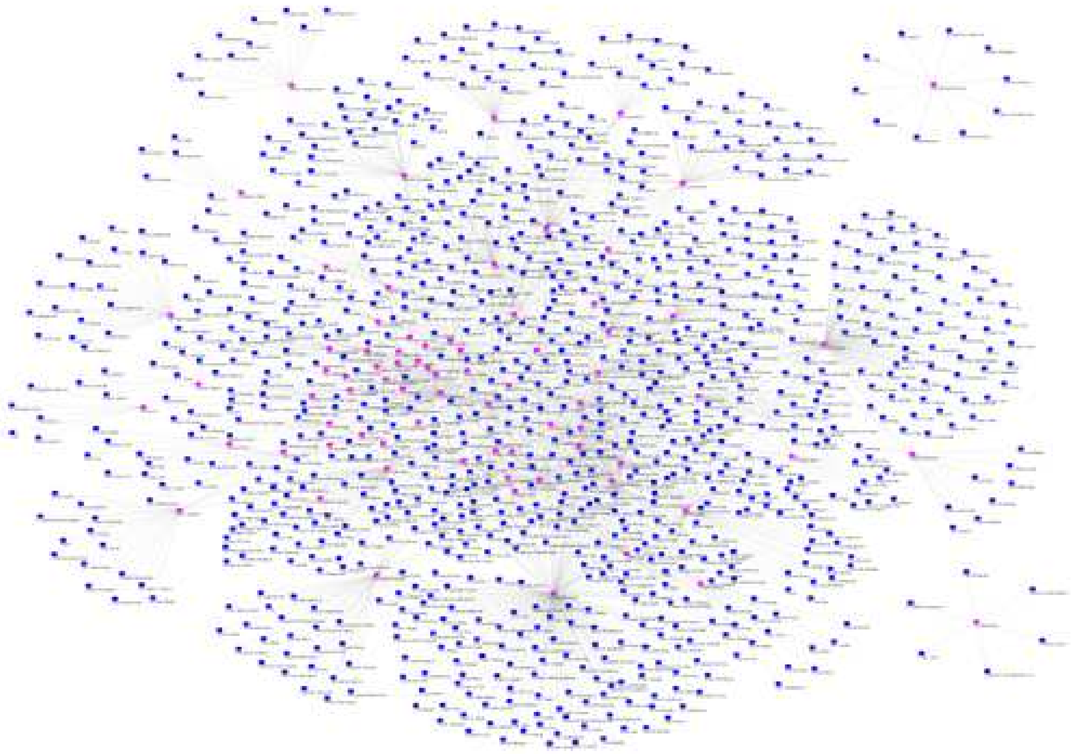
Réseaux

Réseaux de neurones



Réseaux

Réseaux sociaux

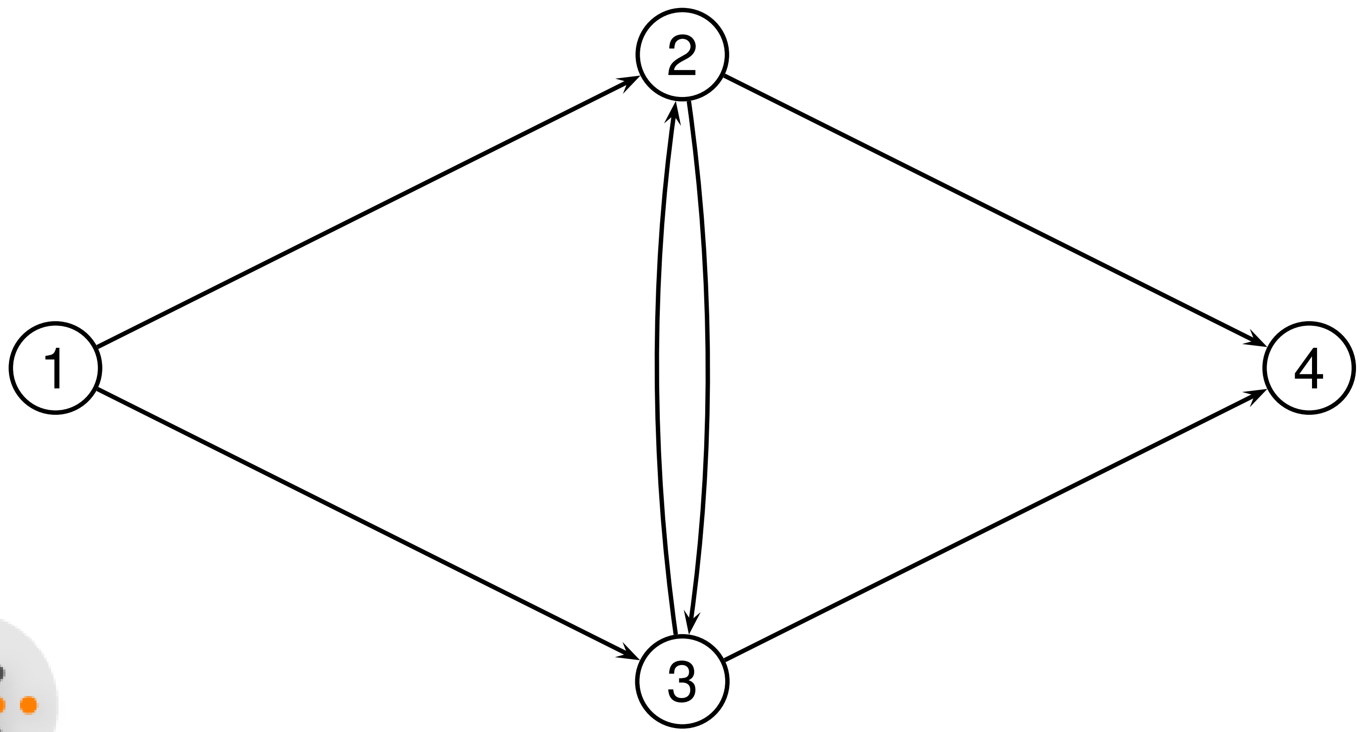


Réseaux

Formalisation mathématique du concept de réseaux

Graphe

Un graphe orienté $G = (N, A)$ *est constitué d'un ensemble* N *de* noeuds *et d'un ensemble* A *de paires de noeuds distincts, appelées* arcs.



Réseaux

Arête

Une arête est un arc dont on ignore l'orientation.

Chaîne

Une suite consécutive d'arêtes est appelée une chaîne.

Chemin

Une suite consécutive d'arcs est appelée un chemin.

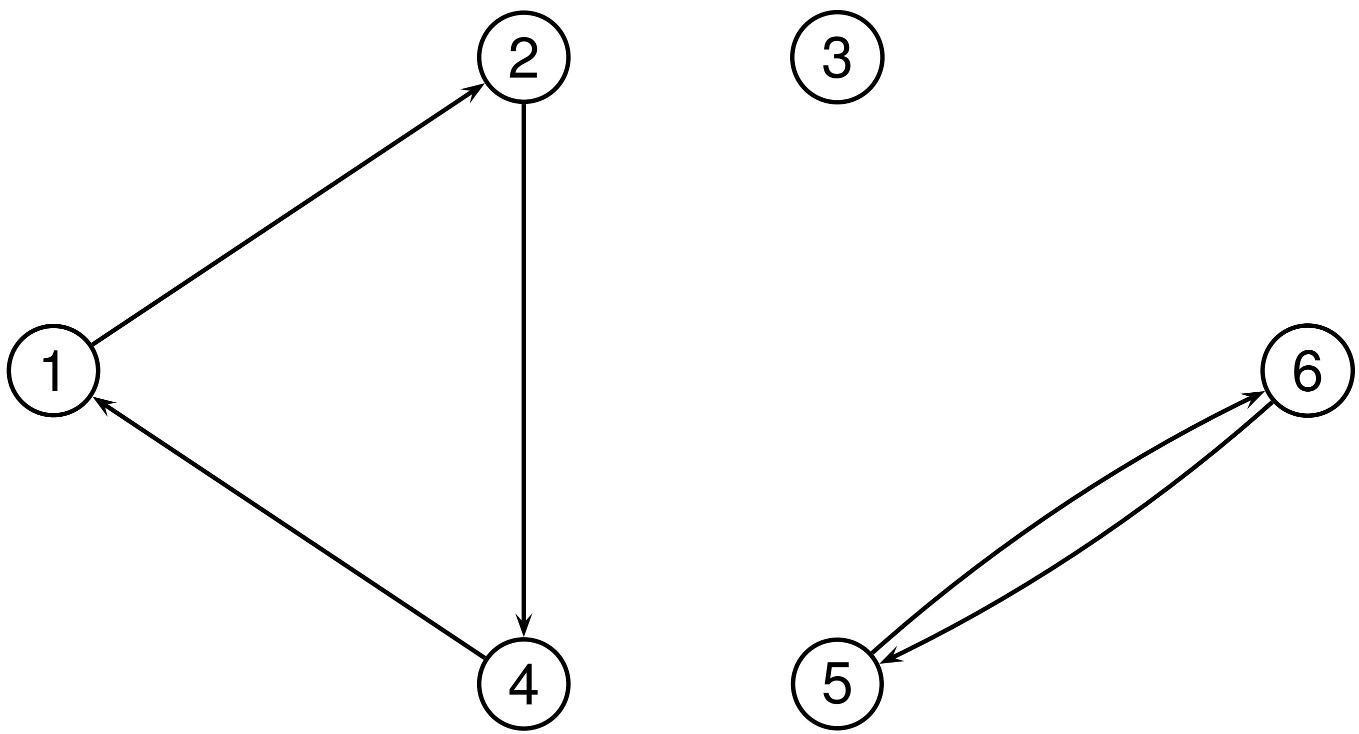
Graphe connexe

Un graphe $G = (N, A)$ est connexe si, quelque soit $i, j \in N$, il existe une chaîne de i à j.

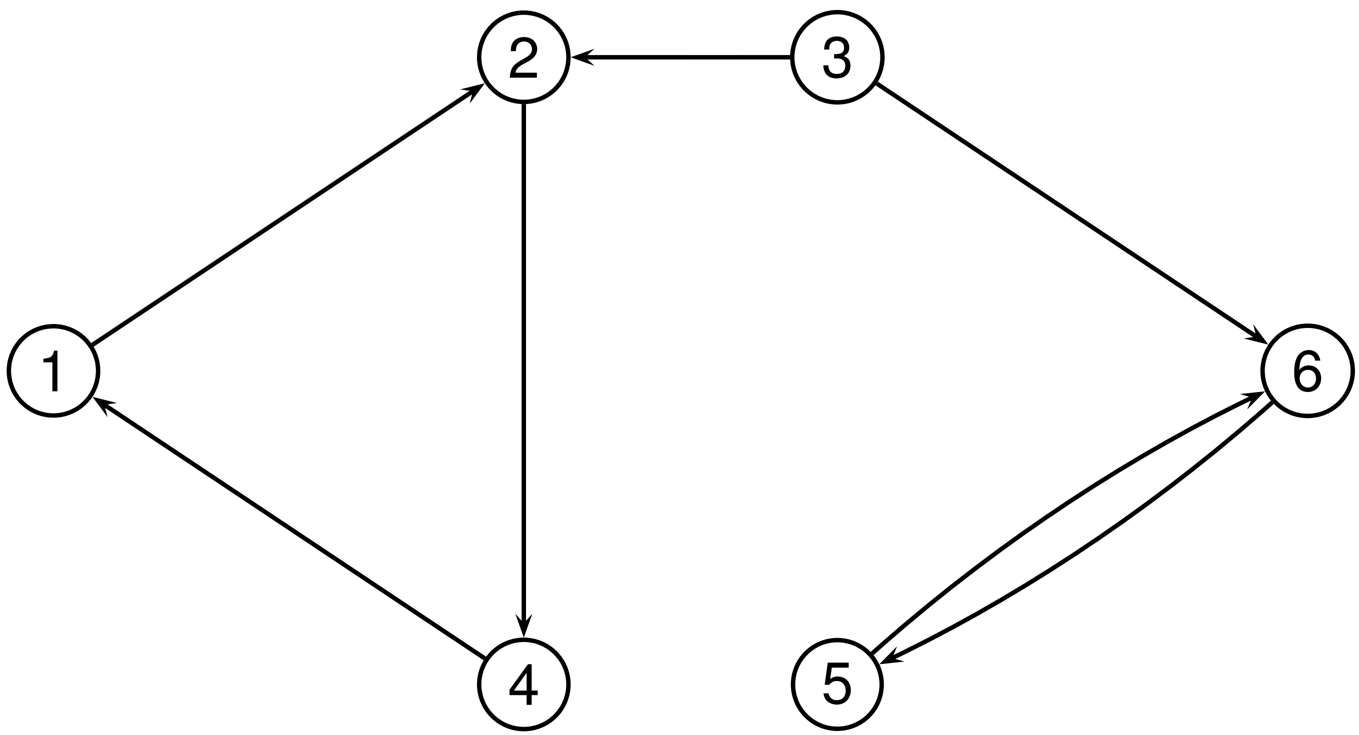
Graphe fortement connexe

Un graphe $G = (N, A)$ est fortement connexe si, quelque soit $i, j \in N$, il existe un chemin de i à j.

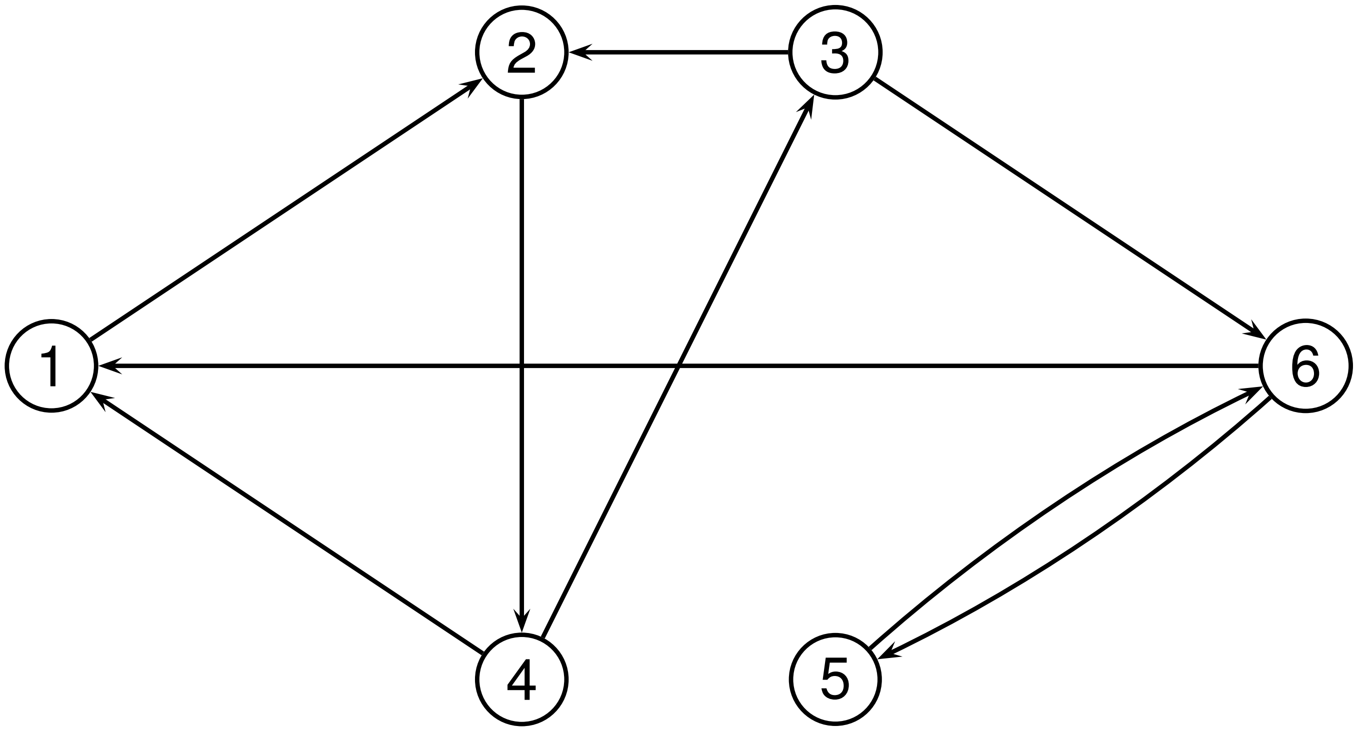
Graphe non connexe



Graphe connexe mais pas fortement



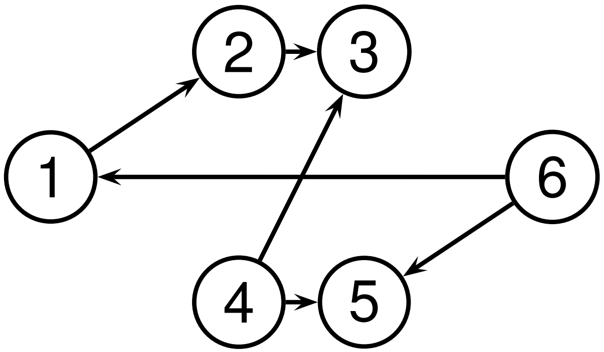
Graphe fortement connexe



Réseaux

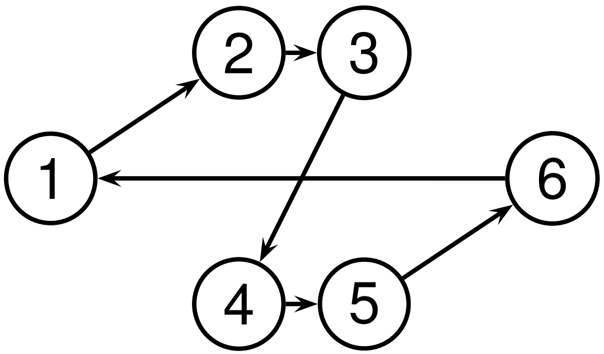
Cycle

Une chaîne dont les deux sommets extrémités sont identiques est un cycle.



Circuit

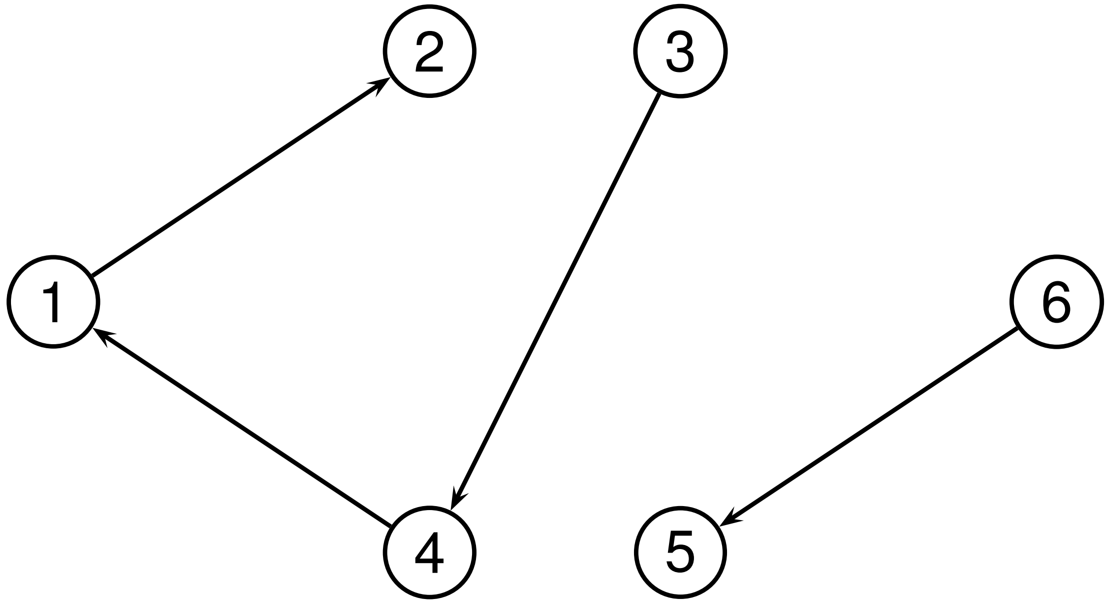
Un chemin dont les deux sommets extrémités sont identiques est un circuit.



Réseaux

Forêt

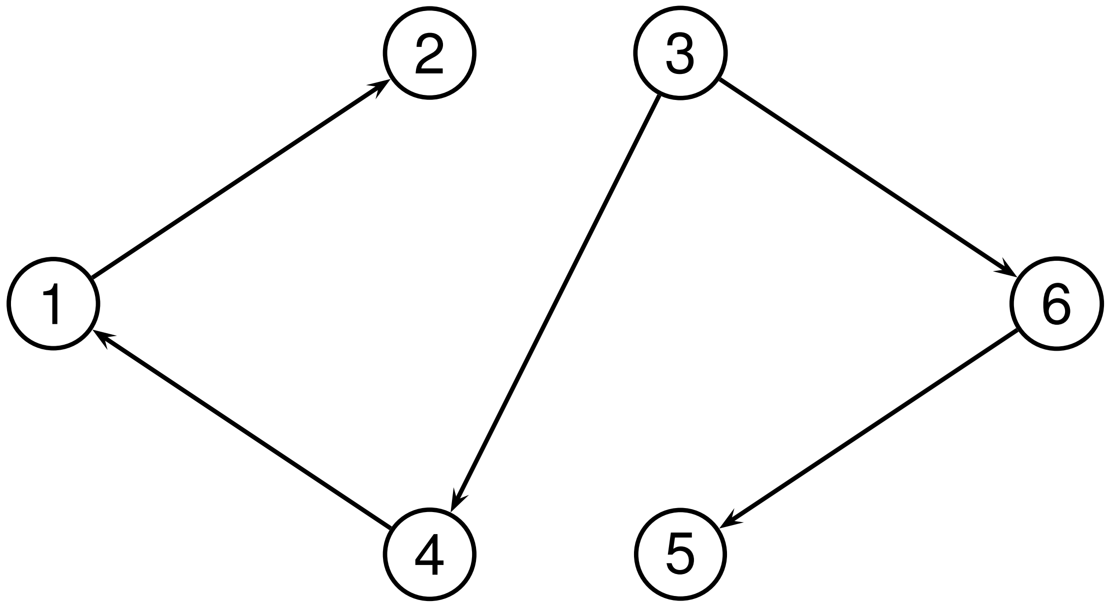
Un graphe sans cycle est appelé une forêt.



Réseaux

Arbre

Un graphe connexe sans cycle est appelé un arbre.



Réseaux

- On supposera qu'il existe au plus un seul arc reliant deux noeuds dans une même direction.
- Dans ce cours, un graphe est un graphe *orienté*.

Réseau

Un réseau est un graphe, pour lequel des valeurs numériques ont été associées aux noeuds et/ou aux arcs.

- Longueur d'une route.
- Capacité d'un tuyau.
- Nombre de personnes habitants en un endroit.
- Flot de véhicules empruntant une autoroute.
- etc.

Flots

- Notations:
  - Noeuds : i et j.
  - Arc : (i, j).
  - Flot sur l'arc (i, j) : x_{ij}.
  - Si $x_{ij} < 0$, le flot va à contre sens.
- Vecteur de flots:

$$\{x_{ij} \text{ tel que } (i, j) \in A\}.$$

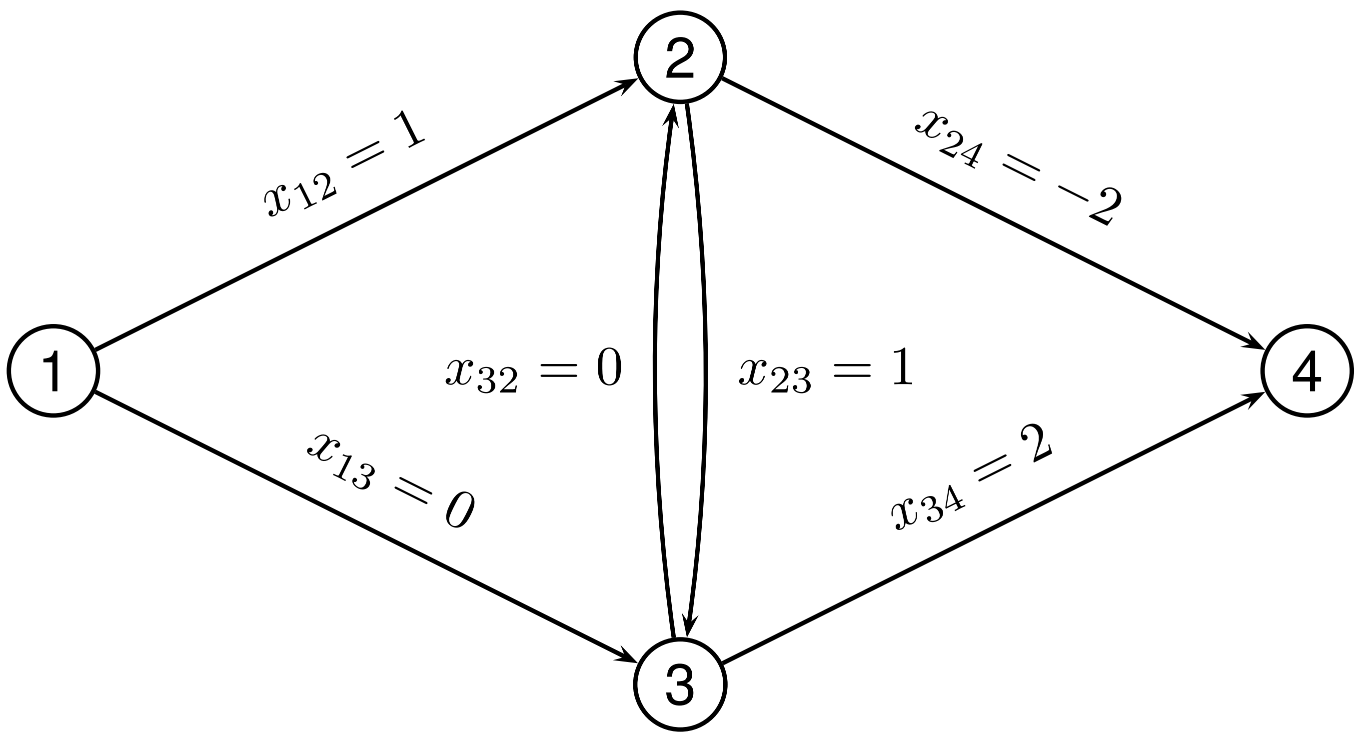
- Divergence : bilan des flots en un noeud i

$$y_i = \sum_{j|(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in A} x_{ji}, \quad \forall i \in N.$$

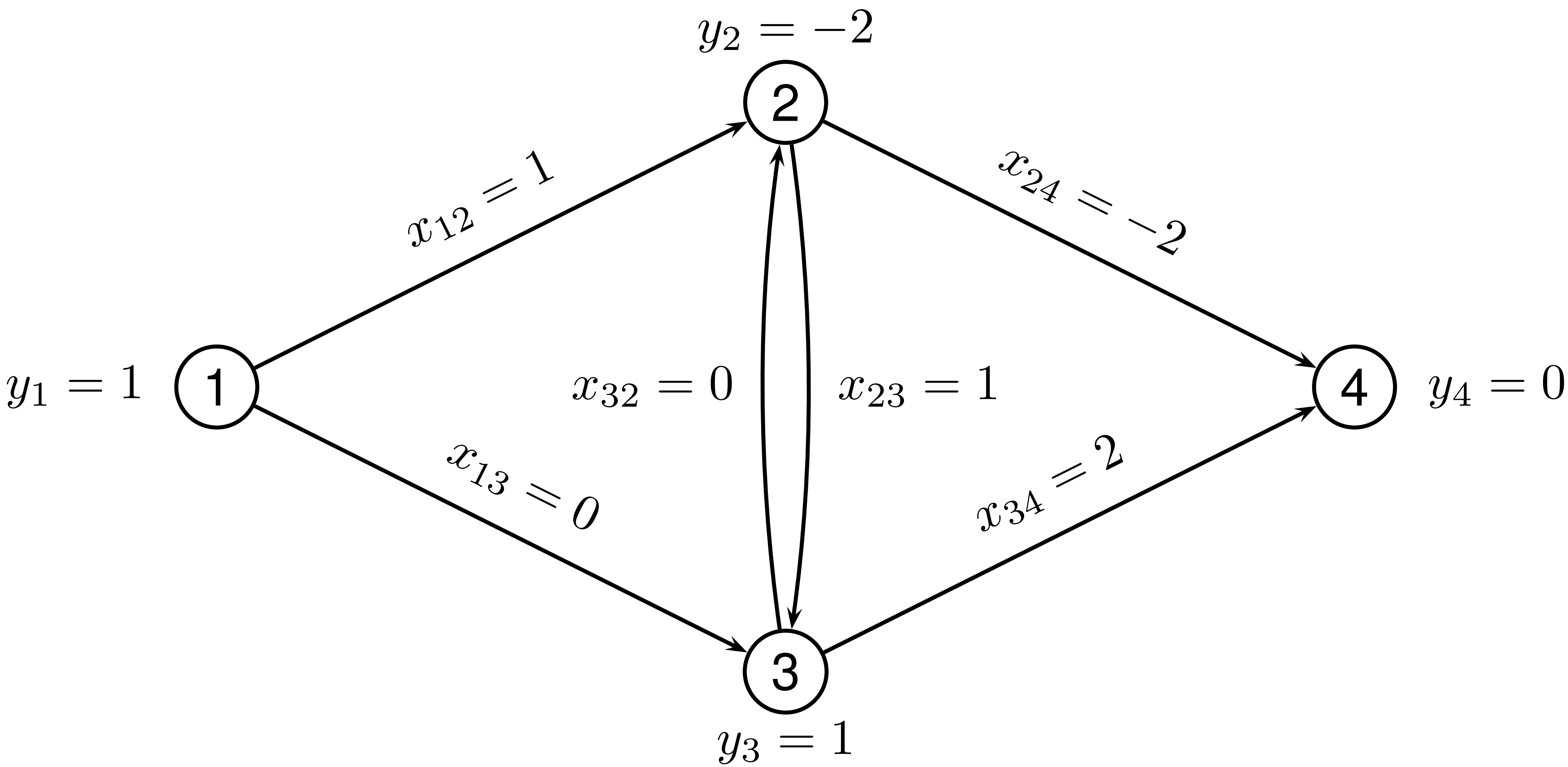
TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

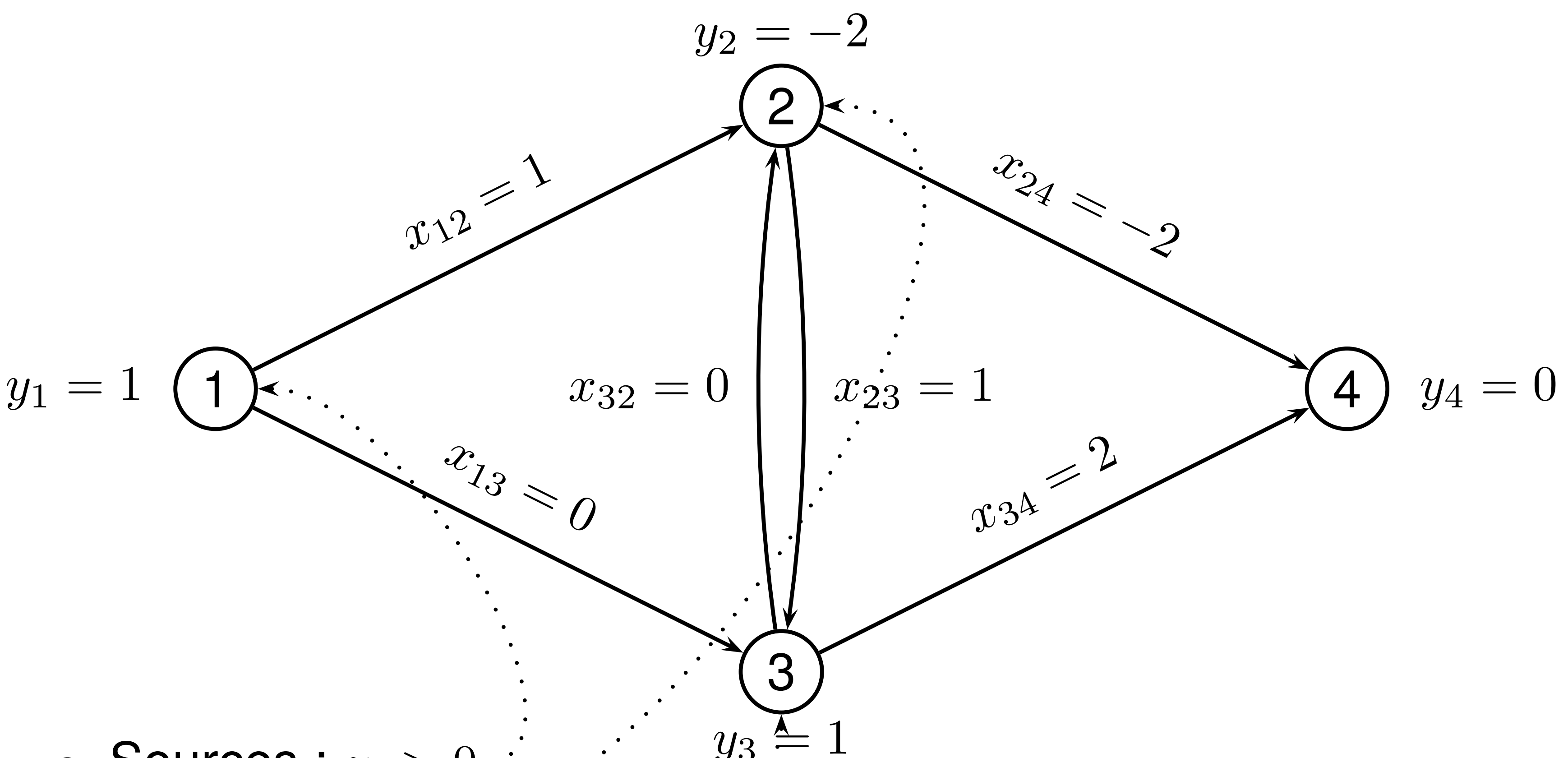
Flots



Flots



Flots



- Sources : $y_i > 0$
- Puits : $y_i < 0$

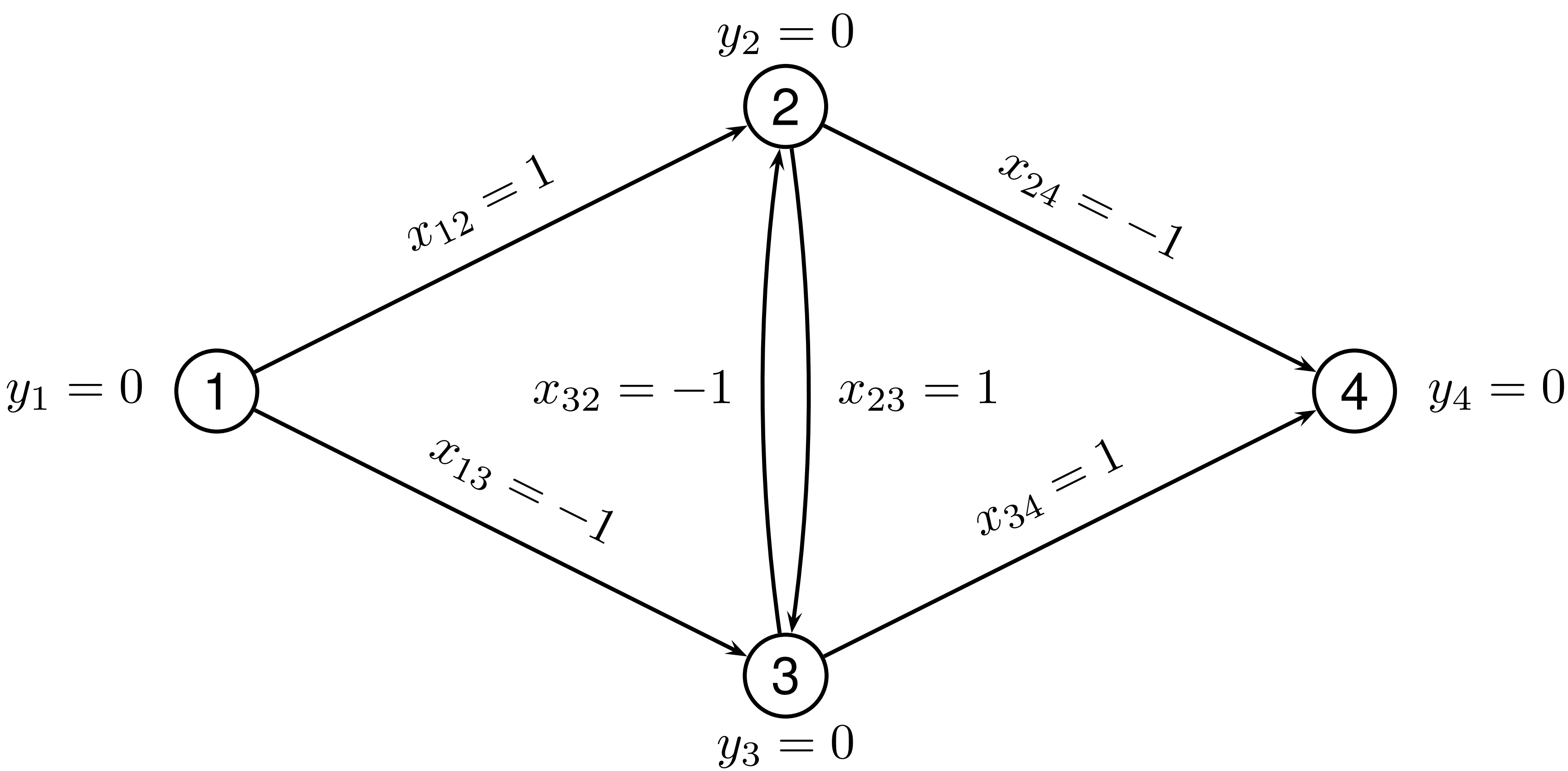
Flots

- On a toujours

$$\sum_{i \in N} y_i = 0.$$

- Si $y_i = 0, \forall i \in N$, on dit que le vecteur de flots est une circulation.

Flots : exemple de circulation



Problème de transbordement

- Une entreprise doit transporter ses produits de ses usines (lieux de production) vers ses clients.
- Elle désire minimiser ses coûts.
- Elle doit se plier aux contraintes de capacité du système de transport.
- Elle peut éventuellement transborder les marchandises en tout noeud du réseau.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Problème de transbordement

- Trouver un vecteur de flots :
  - qui minimise une fonction de coût (linéaire),
  - qui produise un vecteur de divergence donné,
  - qui vérifie les contraintes de capacité.

Problème de transbordement

Données

- a_{ij} : coût unitaire de transport sur l'arc (i, j),
- b_{ij} : flot minimum sur l'arc (i, j) (souvent 0),
- c_{ij} : capacité de l'arc (i, j),
- s_i : divergences désirées.
  - Si $s_i > 0$ alors s_i est l'offre en i, c.-à-d. ce qui est produit par l'usine située en i.
  - Si $s_i < 0$ alors s_i est la demande en i, c.-à-d. ce qui est commandé par le client situé en i.

Problème de transbordement

$$\min_x \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij}$$

sous contraintes

$$\sum_{j|(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in A} x_{ji} = s_i \quad \forall i \in N \qquad \text{offre/demande}$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \quad \text{capacités}$$

Problème de transbordement

- Il s'agit un problème d'optimisation linéaire.
- Il peut donc être résolu par l'algorithme du simplexe.
- Il généralise de nombreux problèmes dans les réseaux.

Le plus court chemin

- Le problème du plus court chemin consiste à déterminer le chemin de coût minimum reliant un noeud a à un noeud b.
- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Idée: on envoie une seule unité de flot de a à b.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le plus court chemin

Données

- a_{ij} : longueur de l'arc (i, j),
- b_{ij} : 0,
- c_{ij} : 1,
- s_i :
  - Origine : $s_a = 1$.
  - Destination : $s_b = -1$.
  - Autres noeuds : $s_i = 0$, si $i \neq a$ et $i \neq b$.

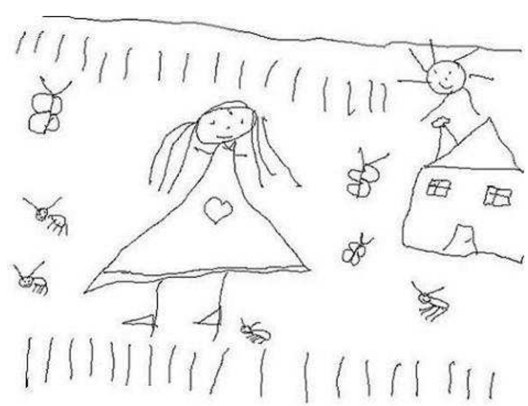
Affectation

Je possède 4 chefs d'oeuvre que je désire vendre

Renoir

Van Gogh

Monet



Bierlaire

Affectation

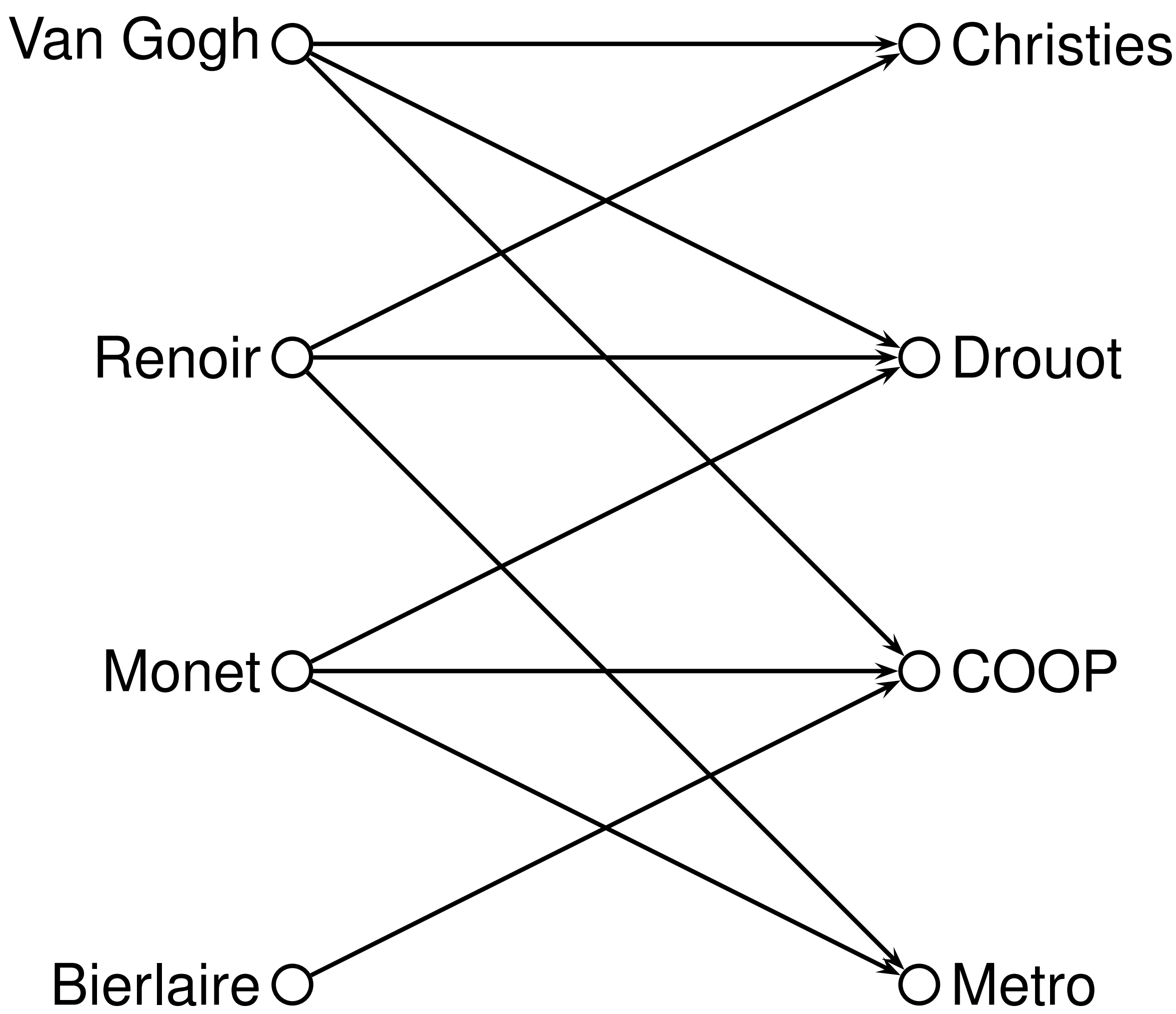
J'ai contacté quatre acheteurs qui ont fait des offres (en kCHF)

	Van Gogh	Renoir	Monet	Bierlaire
Christie's	8000	11000	—	—
Drouot	9000	13000	12000	—
COOP	9000	—	11000	0.01
Metropolitan	—	14000	12000	—

Affectation

- Je désire vendre exactement une peinture à chaque acheteur.
- Quelle peinture dois je vendre à quel acheteur pour gagner un maximum ?
- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Représentation en réseau.

Affectation



Affectation

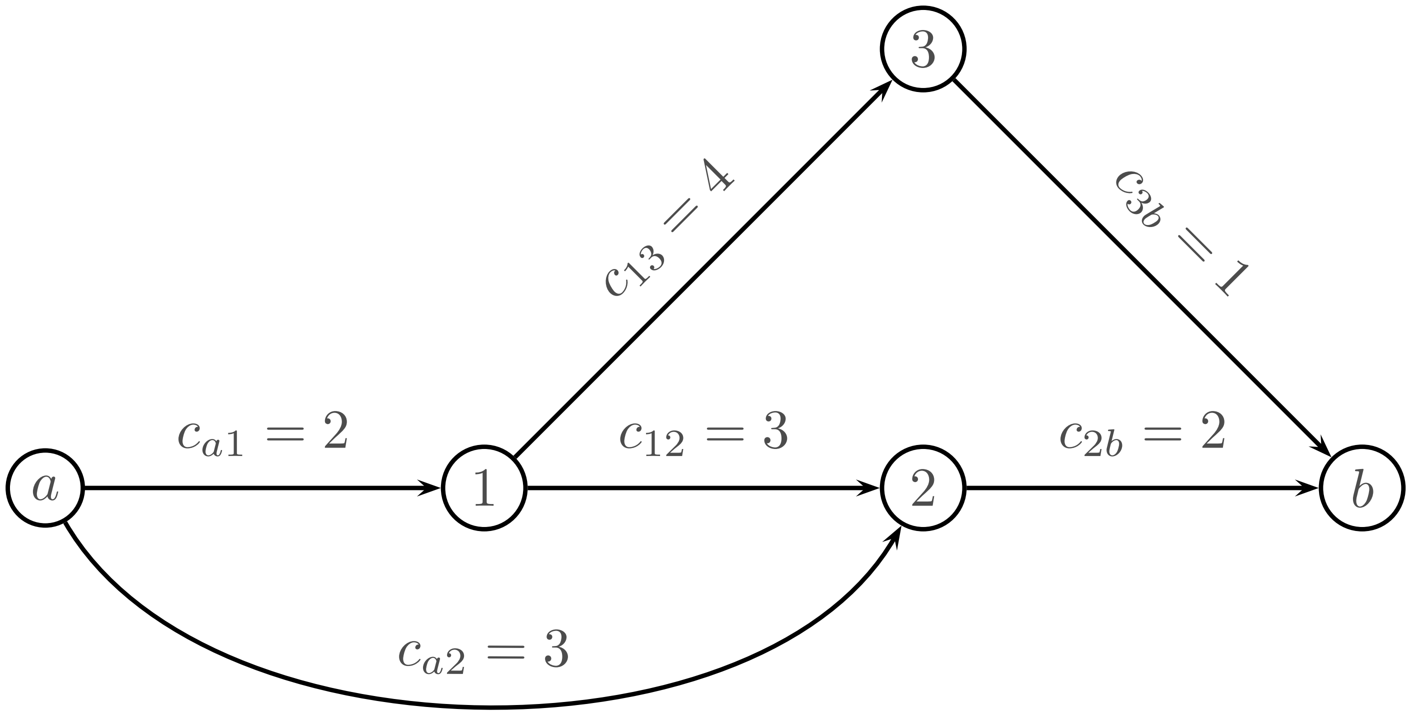
Données

- a_{ij} : valeur de l'offre, changée de signe,
- b_{ij} : 0,
- c_{ij} : 1.
- s_i :
  - Noeud i "oeuvre" : $s_i = 1$.
  - Noeud j "acheteur" : $s_j = -1$.

Flot maximal

- Une société pétrolière désire envoyer un maximum de pétrole via un réseau de pipelines entre un lieu a et un lieu b.
- Combien de litres par heure pourra-t-elle faire passer par le réseau ?
- Les capacités des pipelines (en kilolitres/heure) sont indiquées sur les arcs.

Flot maximal



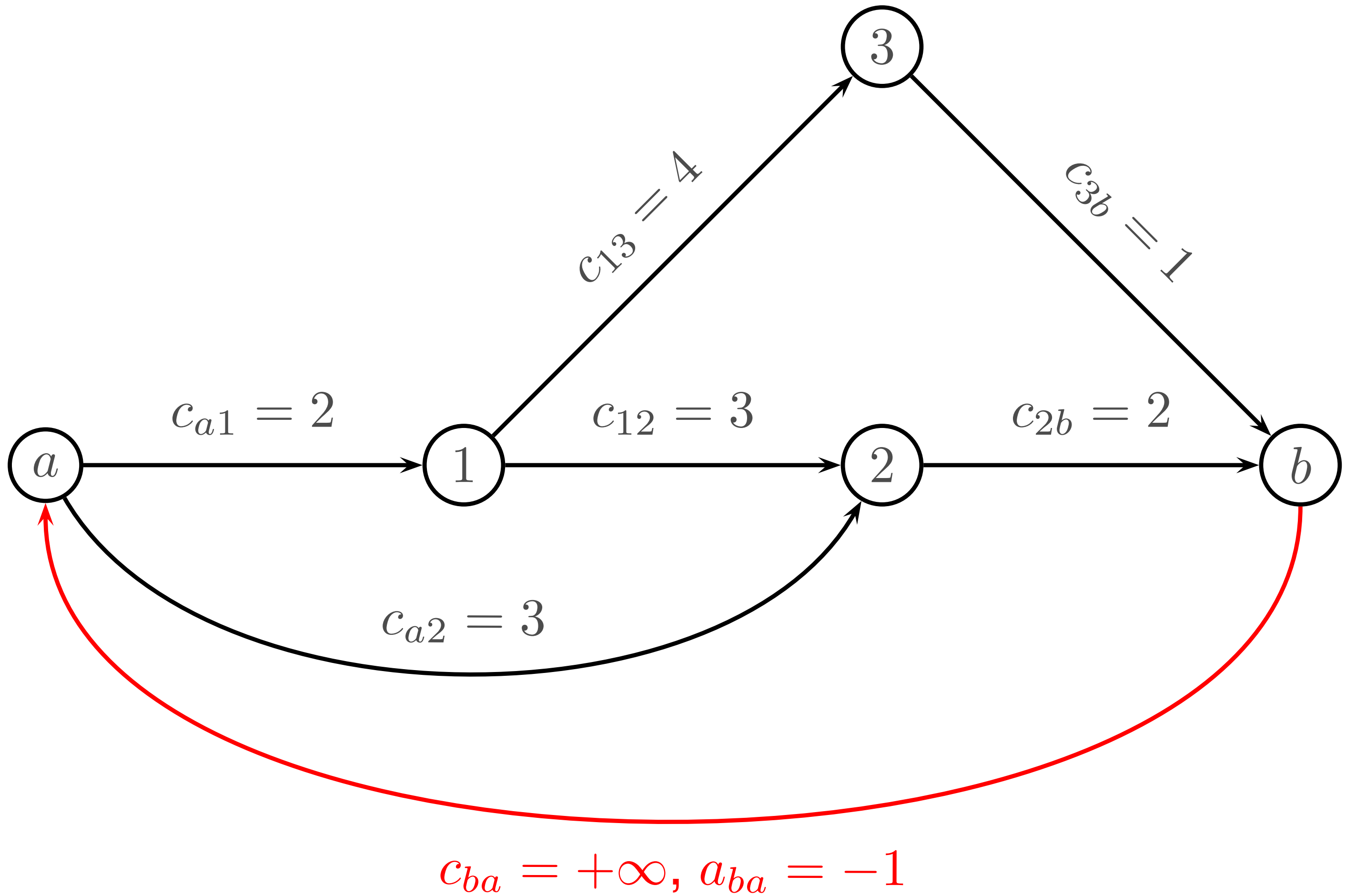
TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Flot maximal

- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Il faut ajouter un arc artificiel.
- Idée : chaque unité de flot qui a réussi à passer à travers le réseau est ramenée artificiellement à a, en rapportant des bénéfices (coût négatif).

Flot maximal



Flot maximal

Données

- a_{ij} : $\begin{cases} 0 & \text{pour les arc réels} \\ -1 & \text{pour l'arc artificiel} \end{cases}$
- b_{ij} : 0,
- c_{ij} : capacités,
- $s_i = 0 \; \forall i$: on désire une circulation.

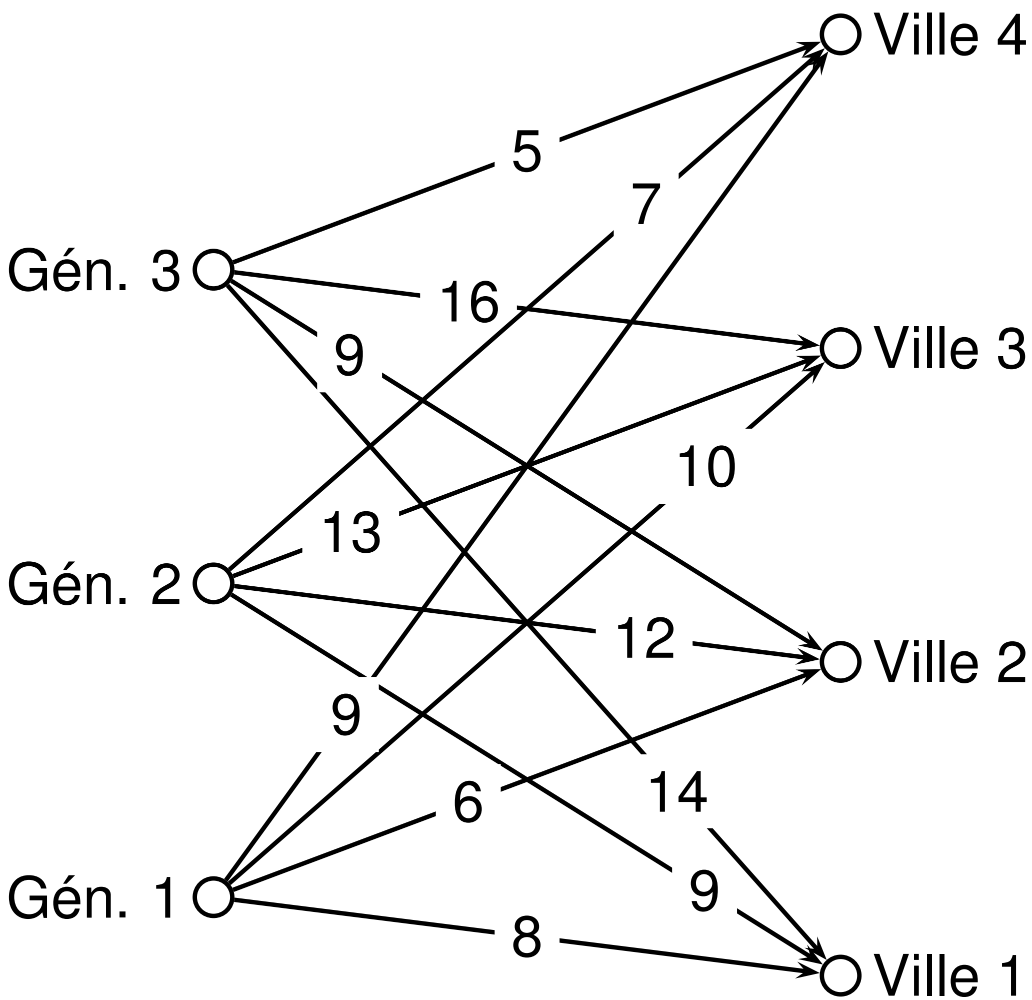
Problème de transport

- Une société électrique possède trois générateurs pour fournir 4 villes en électricité.
- Les générateurs produisent resp. 35, 50 et 40 GWh.
- Les villes consomment resp. 45, 20, 30 et 30 GWh.
- Les coûts de transport d'un GWh d'un générateur à une ville sont repris dans le tableau suivant.

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Gén. 1	8	6	10	9
Gén. 2	9	12	13	7
Gén. 3	14	9	16	5

- Comment approvisionner les villes à moindre coût ?

Problème de transport



Problème de transport

Données

- a_{ij} : prix entre générateur i et ville j,
- b_{ij} : 0,
- c_{ij} : $+\infty$,
- s_i: offre et demande

$$s_i = \begin{cases} \text{capacité de production} & \text{si } i = \text{générateur} \\ -\text{demande} & \text{si } i = \text{ville} \end{cases}$$

Résumé

- Le problème de transbordement généralise beaucoup de problèmes dans les réseaux.
- Il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire.
- L'algorithme du simplexe peut être utilisé.
- Dans de nombreux cas, il est possible d'exploiter mieux la structure du problème afin d'obtenir un algorithme plus efficace.
- Exemple : problème du plus court chemin.