Serie 7

Problème 1

Considérer le programme linéaire suivant :

$$(\mathrm{PL})\left\{\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximiser} & z = & x_1 & + & 11x_2 & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & 10x_2 & \leq & 9 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

a) Représenter le domaine admissible du problème (PL) et déterminer sa solution optimale.
b) Si on restreint le domaine des variables x_1 et x_2 de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{N}$, quel est l'optimum du problème (PLE) ainsi obtenu ?
c) La solution optimale du problème (PLE) peut-elle être obtenue en arrondissant celle du problème (PL) ?

Problème 2

Soit le problème de sac-à-dos binaire suivant :

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcl} \text{Max}\, z & = & 13x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{s.c.} & & 6x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 12 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Pour résoudre ce problème à l'aide de la méthode de séparation et d'évaluation (branch and bound), décrivons les deux phases :

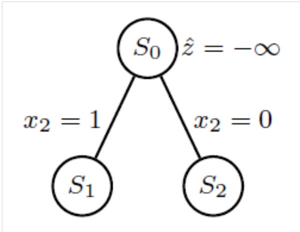
Évaluation. Pour la phase d'évaluation, on va résoudre la relaxation linéaire du problème, c'est-à-dire le programme linéaire obtenu en remplaçant les contraintes $x_i \in \{0,1\}$ $\forall i$ par $0 \leq x_i \leq 1$ $\forall i$. Pour résoudre cette relaxation, on va appliquer un algorithme glouton : on considère les objets par ordre décroissant de leur rendement $\rho_i = c_i/a_i$.

Objet i	1	2	3	4
Utilité c_i	13	16	7	4
Poids a_i	6	8	4	3
$\rho_i = c_i/a_i$	$2.1\bar{6}$	2	1.75	$1.\bar{3}$

Ici, on va les considérer dans l'ordre donné.

Séparation. Si la solution de la relaxation linéaire n'est pas entière, on crée deux sous-problèmes en posant, dans l'un, $x_j = 1$ et, dans l'autre, $x_j = 0$ où x_j est la variable fractionnaire dans la solution de la relaxation linéaire.

Initialisation. L'arbre d'énumération ne contient que la racine S_0 représentant le problème initial. $\hat{z} = -\infty$.(Attention, on maximise !)



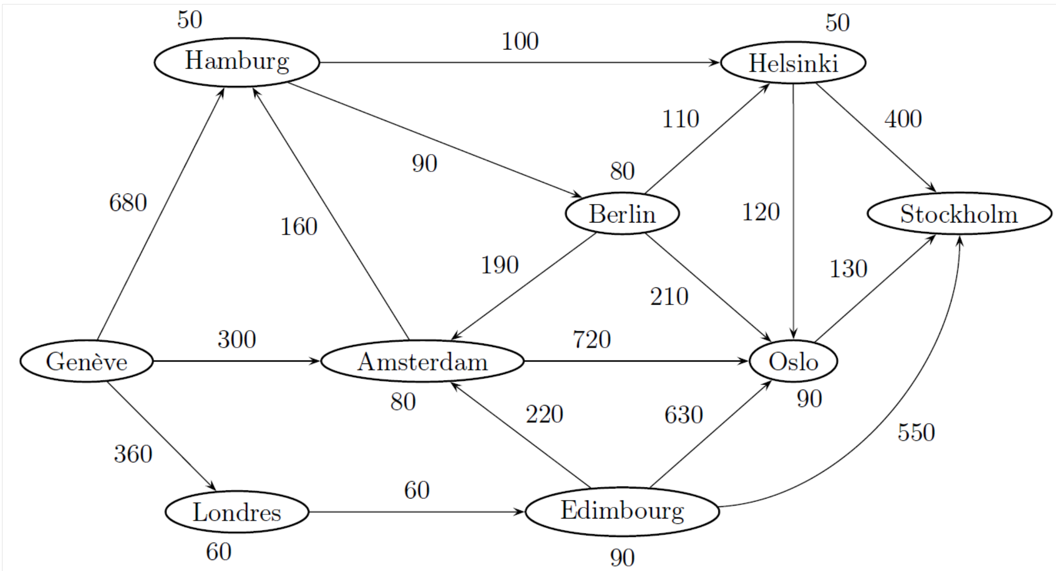
Première itération. On évalue une borne supérieure $\bar{z}_0$ pour S_0 :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 6/8,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \qquad \bar{z}_0 = 25.$$

La solution n'est pas entière et $\bar{z}_0 > \hat{z}$. On sépare S_0 en créant deux sous-problèmes, avec respectivement, $x_2 = 1$ et $x_2 = 0$.
Poursuis la résolution de ce problème en commençant par traiter le sommet S_1 !

Problème 3
Un étudiant de l'EPFL, désirant faire un séjour linguistique, décide de se rendre en Suède.

Après avoir fait le tour de quelques compagnies, il a recensé plusieurs connexions aériennes lui permettant d'aller de Genève à Stockholm. Il les a représentées à l'aide du graphe suivant :

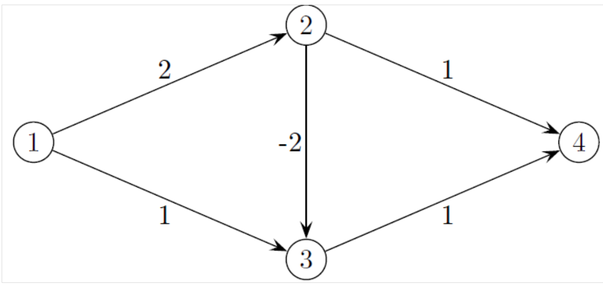


Cependant, les horaires aériens sont faits de telle manière qu'il est obligé de passer la nuit dans chacune des villes où il fera escale.
Les valeurs sur les arcs correspondent au prix en Frs pour les parcourir et les valeurs à côté des sommets représentent le prix en Frs à payer pour passer la nuit dans un hôtel de la ville correspondante.
L'étudiant, ne possédant qu'un faible revenu, désire déterminer le chemin le meilleur marché pour se rendre de Genève à Stockholm.

a) Déterminer la solution optimale de ce problème.
b) Si le prix de l'hôtel est négociable à Edimbourg, pour quelles valeurs (non négatives) du prix de la chambre le chemin passant par Edimbourg sera le moins cher ?

Problème 4

a) Appliquer l'algorithme de Dijkstra de manière à déterminer le plus court chemin du sommet 1 vers tous les autres sommets du graphe suivant :



b) Le sommet 3 est à deux reprises inséré dans l'ensemble des nœuds à étiquette temporaire V et traité par l'algorithme. Pourquoi ?
c) Donner l'arbre des plus courts chemins.
d) Montrer, à l'aide des conditions d'optimalité, que la solution trouvée est optimale.