
Serie 4

Problème 1

Soit le problème

$$\begin{array}{ll} \min & z = -3x - 2y \\ \text{s.c.} & x - y \geq -2 \\ & 2x + y \leq 8 \\ & x + y \leq 5 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

- Dessiner le domaine \mathcal{D} des *solutions admissibles* du problème. Enumérer ses sommets.
- Résoudre le problème graphiquement.
- Mettre le programme linéaire sous forme canonique, puis standard.

Problème 2

Soit le problème de minimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \min z & = x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Mettre ce problème sous forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3 et x_4 .
- Représenter graphiquement le problème.
- Pour la base dont les indices de base sont 1 et 4, déterminer toutes les directions de base d_j ainsi que les pas θ_j associés.
- Pour la base dont les indices de base sont 2 et 3, déterminer toutes les directions de base d_j ainsi que les pas θ_j associés.
- Représenter sur le graphique les directions calculées en c).
- Représenter sur le graphique les directions calculées en d).

Problème 3

On considère le problème suivant :

$$\begin{array}{rcl} \min z = & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 & \\ & 2x_1 + x_2 = 3 & \\ & -x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Supposons que les indices de base soient 1,2 et 3.

- Calculer la solution de base associée. Est-elle admissible ?
- Rendre non nulle la variable hors-base x_4 permet-il de réduire le coût ? Que peut-on en déduire ?

Problème 4

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \min z = & -3x_1 - 4x_2 & \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 \leq 50 & \\ & x_1 \leq 20 & \\ & x_2 \leq 30 & \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

- Mettre ce problème sous forme standard.
- Résoudre le problème ainsi obtenu avec l'algorithme du simplexe en utilisant le tableau. Spécifier à chaque étape de l'algorithme les variables en base, le sommet visité ainsi que (x, θ, d) tels que $x^+ = x + \theta d$.

Problème 5

- Déterminer toutes les bases de la matrice du système suivant. Donner également les solutions de base associées. Sont-elles admissibles ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 4 \end{cases}$$

- Pour une matrice 2×5 , quel est le nombre **maximal** de bases possible ?

Problème 6

Un grand-oncle riche âgé de 90 ans décide d'aller chez le notaire pour établir son héritage. Parmi ses héritiers il a trois petits-neveux, André, Blaise et Claude, aux habitudes un peu particulières. Il désire leur léguer au maximum 100'000 Frs, mais il ne sait pas comment les répartir. Le notaire qui est aussi féru de recherche opérationnelle pose des questions au grand-oncle pour déterminer les habitudes des petits-neveux. Il ressort de son enquête qu'en une année André dépense en général 40% de son avoir, Blaise 30% de son avoir et Claude 20%. L'argent qu'ils ne dépensent pas est investi de la manière suivante : André l'investit dans sa nouvelle entreprise, qui est très rentable, à 50/3%, Blaise en actions à 300/7% et Claude le met sous son oreiller, il n'a donc aucun rendement. Un autre souhait du grand-oncle est que la somme dépensée par chacun de ses trois petits-neveux n'excède pas 10'000 Frs. Le grand-oncle souhaite bien sûr que la somme totale restant à ses petits-neveux à la fin de l'année soit maximale.

- Aider le notaire à poser le P.L. du problème. *Remarque : on suppose que les petits-neveux reçoivent l'héritage au premier janvier et on calculera l'intérêt du l'argent placé le 31 décembre, c'est-à-dire à la fin des dépenses.* Mettre le problème sous forme canonique et standard.
- Résoudre le problème à l'aide de la méthode du simplexe.