Optimisation linéaire

Michel Bierlaire

michel.bierlaire@epfl.ch

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

Optimisation linéaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \\ g(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linéaire, $n > 0$
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire, $m \geq 0$
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire, $p \geq 0$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation linéaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0, \\ Cx - d &\leq 0. \end{aligned}$$

- $c \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 0$

Optimisation linéaire

Il est toujours possible d'écrire le problème sous la forme suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b, \\ x & \geq & 0. \end{array}$$

- $c \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$.

Problème en forme standard

Exemple

$$\min_{x_1,x_2,x_3} 3x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - 3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

- Définir $x_i = y_i^+ - y_i^-$, avec $y_i^+, y_i^- \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.
- Introduire la variable d'écart $y_4 \geq 0$.

Exemple

$$\min_{y_1^p, y_1^m, y_2^p, y_2^m, y_3^p, y_3^m, y_4} \quad 3(y_1^p - y_1^m) + 2(y_2^p - y_2^m)$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} 2y_1^p - 2y_1^m - y_3^p + y_3^m & = & 3 \\ y_1^1 - y_1^m - y_2^p + y_2^m + y_4 & = & 0 \\ y_1^p, y_1^m, y_2^p, y_2^m, y_3^p, y_3^m, y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Optimisation linéaire

... ou la forme suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$Ax \quad \leq \quad b.$$

- $c \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$.

Problème en forme canonique

Exemple

$$\min_{x_1,x_2,x_3} \quad 3x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &\leq 3 \\ -2x_1 + x_3 &\leq -3 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonction objectif

- Linéaire
- Gradient constant :

$$f(x) = c^T x, \;\; \nabla f(x) = c$$

- S'il n'y avait pas de contrainte, solution triviale :
  - Si $c = 0$, tout x est solution.
  - Si $c \neq 0$, le problème n'est pas borné.
- Analysons donc les contraintes
  - d'un point de vue algébrique
  - d'un point de vue géométrique

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Contraintes

Considérons le problème en forme standard :

$$Ax = b, x \geq 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Contraintes d'égalité :

$$Ax = b$$

Trois possibilités pour le nombre de solutions :

- Système non singulier : une seule solution
- Système incompatible : aucune solution
- Système sous déterminé : une infinité de solutions

Seul le dernier point est pertinent pour l'optimisation.

Contraintes

- Objectif : trouver la meilleure solution parmi le nombre infini de solutions qui vérifient les contraintes
- Deux types de contraintes : $Ax = b$ et $x \geq 0$
- Solutions admissibles pour $Ax = b$: élimination des contraintes par substitution
- Contraintes actives pour $x \geq 0$: quelles variables doivent être mises à zéro ?
- Interprétation géométrique :
  - l'ensemble des contraintes forment un polytope
  - la solution optimale se trouve sur un sommet de ce polytope.

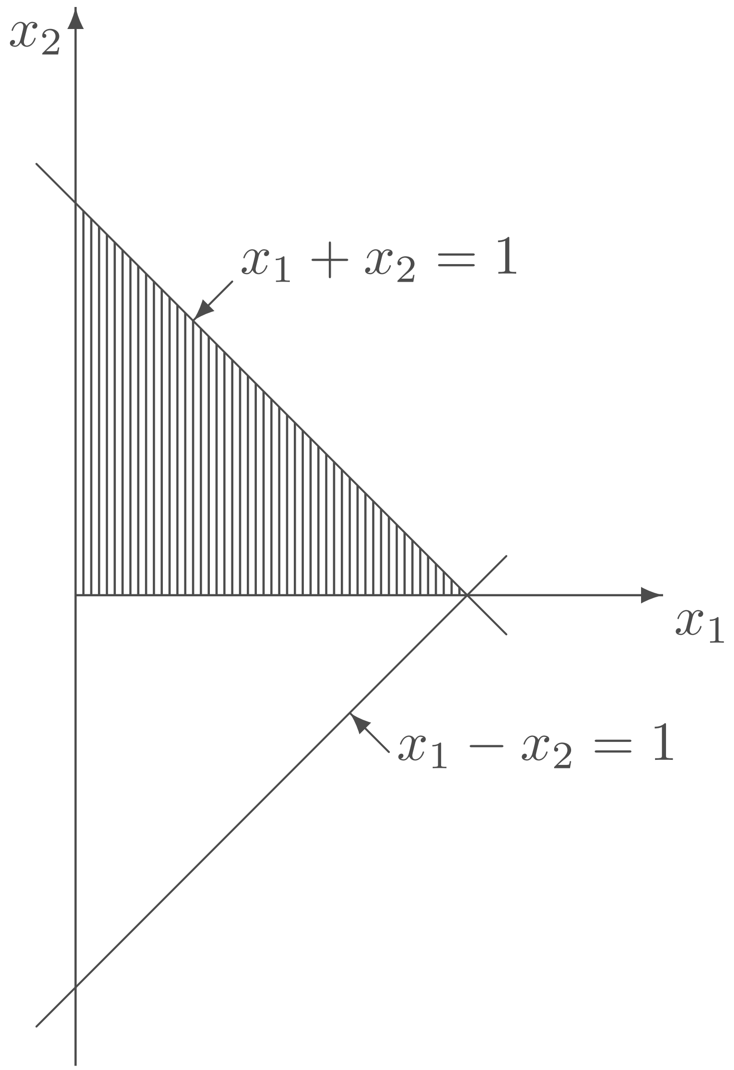
Résolution graphique

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} -x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Résolution graphique



Résolution graphique

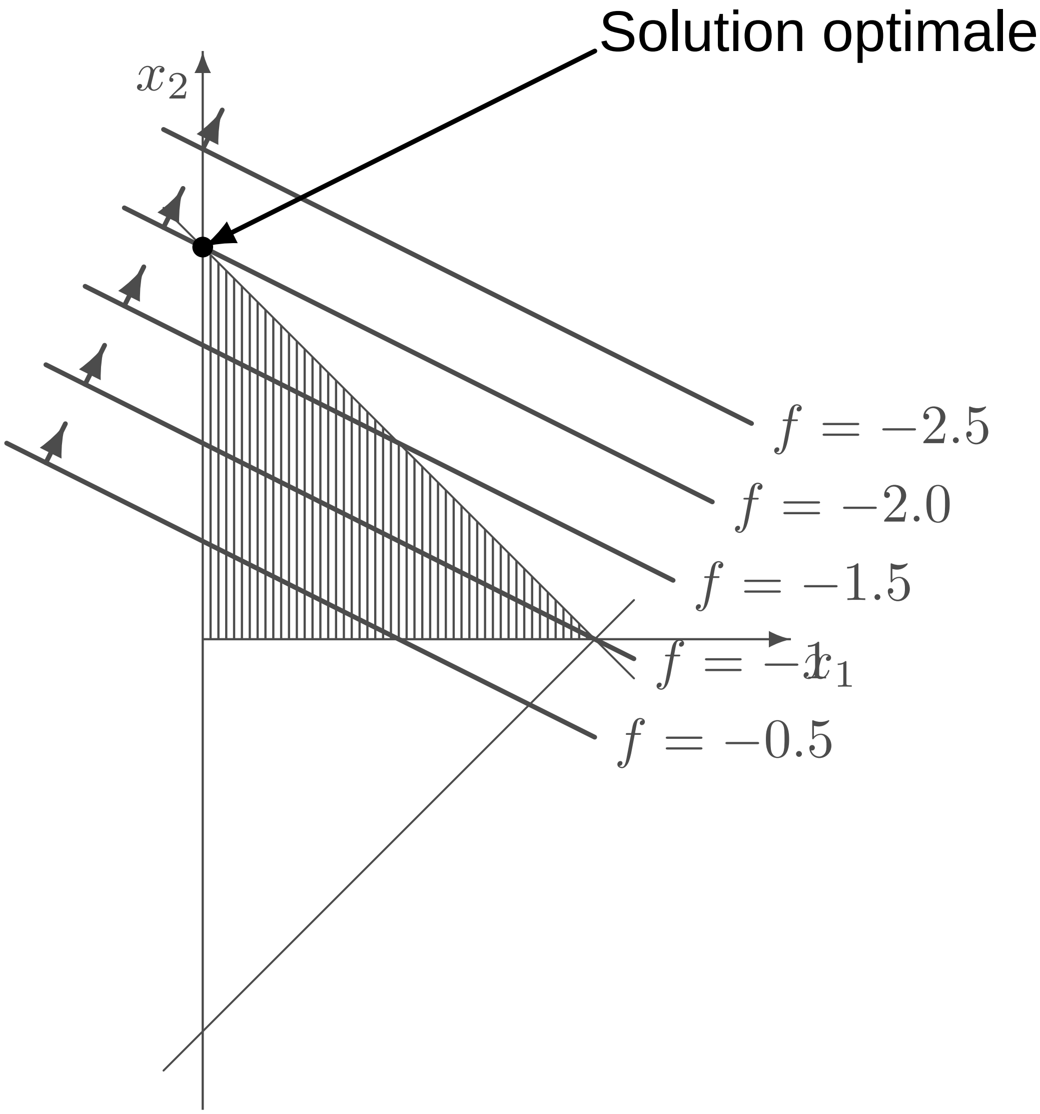
- Fonction objectif linéaire, donc les courbes de niveau sont des droites
- Gradient :

$$f(x) = c^T x, \quad \nabla f(x) = c$$

- Direction de la plus forte descente : $-c$.
- Toutes les “droites” de niveau sont perpendiculaires au vecteur

$$-\nabla f(x) = -c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résolution graphique



Contraintes redondantes

Contraintes redondantes *Soit un système compatible de contraintes d'égalité linéaires $Ax = b$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$. Si le rang de A est déficient, c'est-à-dire rang(A)=$r < m$, alors il existe une matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ de rang plein (i.e. rang($\tilde{A}) = r$), composée exclusivement de lignes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ de A telle que*

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \Longleftrightarrow Ax = b. \tag{1}$$

où $\tilde{b}$ est composée des éléments $\ell_1, \ldots, \ell_r$ de b.

(p. 63)

Autrement dit, si le rang de A est r, on peut éliminer $m - r$ contraintes sans modifier la nature du problème.

Contraintes redondantes

Soient les contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rang A=2 car, si ℓ_i est la ligne i,

$$\ell_3 = -2\ell_1 + 3\ell_2$$

et la dernière contrainte peut être éliminée.

Elimination des contraintes par substitution

Exemple :

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sous contraintes

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_4 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array}$$

Récrivons les contraintes d'égalité:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1 - x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 1 - x_1 + x_2. \end{array}$$

pour obtenir

$$\min x_1 + x_2 + (1 - x_1 - x_2) + 1 - x_1 + x_2 = -x_1 + x_2 + 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Elimination des contraintes par substitution

Généralisons pour

$$Ax = b \;\; (A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \leq n, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, \text{rang}(A) = m)$$

- Choisissons m colonnes linéairement indépendantes de A
- Permutons les colonnes pour les placer à gauche.

$$AP = (B \; N)$$

  - $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice de permutation (telle que $PP^T = I$)
  - $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ contient les m colonnes choisies, et est donc inversible
  - $N \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ contient les autres colonnes

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Elimination des contraintes par substitution

- Permutons le vecteur x, et appelons x_B les m premières composantes, et x_N les autres.

$$P^T x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

- Récrivons les contraintes :

$$Ax = AP(P^T x) = (B \;\; N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b$$

- On peut maintenant écrire x_B en fonction de x_N

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N).$$

Elimination des contraintes par substitution

Reprenons l'exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminons x_3 et x_4. Permutons les colonnes pour placer les colonnes 3 et 4 au début :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elimination des contraintes par substitution

$$AP = (B|N) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= B^{-1}(b - Nx_N) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - x_1 - x_2 \\ 1 - x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Point de vue algébrique : résumé

- Système d'équations $Ax = b$ sous-déterminé : $m \leq n$
- Possibilité d'ignorer les contraintes redondantes : A de rang plein
- Elimination des contraintes par substitution
- Note : ne pas oublier les contraintes $x \geq 0$
- Question : quelles contraintes d'inégalité sont actives à la solution

Polytope

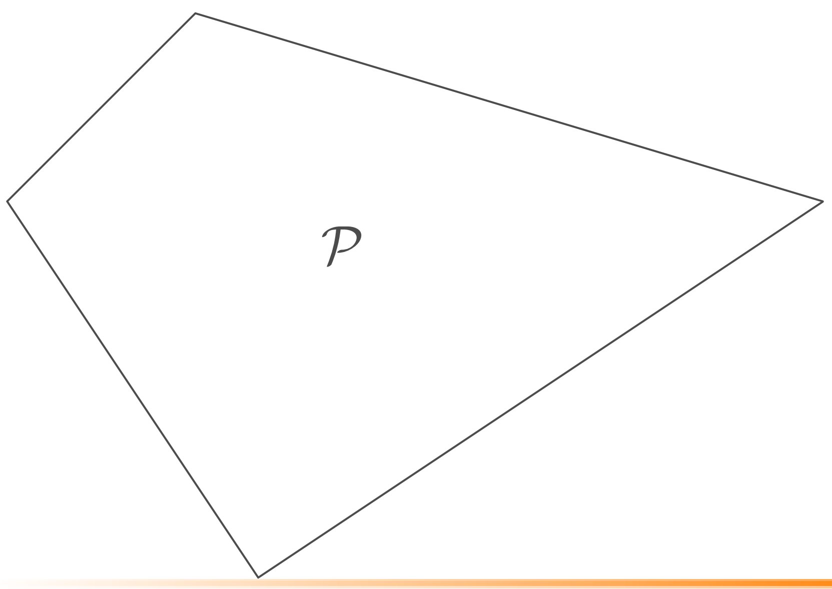
Analysons les contraintes d'un point de vue géométrique

Polytope

Un polytope *est un ensemble de points de* $\mathbb{R}^n$ *délimité par des hyperplans, c'est-à-dire*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\},$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *et* $b \in \mathbb{R}^m$. *Il s'agit de la généralisation à* $\mathbb{R}^n$ *pour* $n \geq 4$ *de la notion de polygone dans* $\mathbb{R}^2$ *et de polyèdre dans* $\mathbb{R}^3$.



Polytope

Polytope en forme standard

Un polytope en forme standard *est un polytope défini de la manière suivante*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, \; x \geq 0\} ,$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *et* $b \in \mathbb{R}^m$*.*

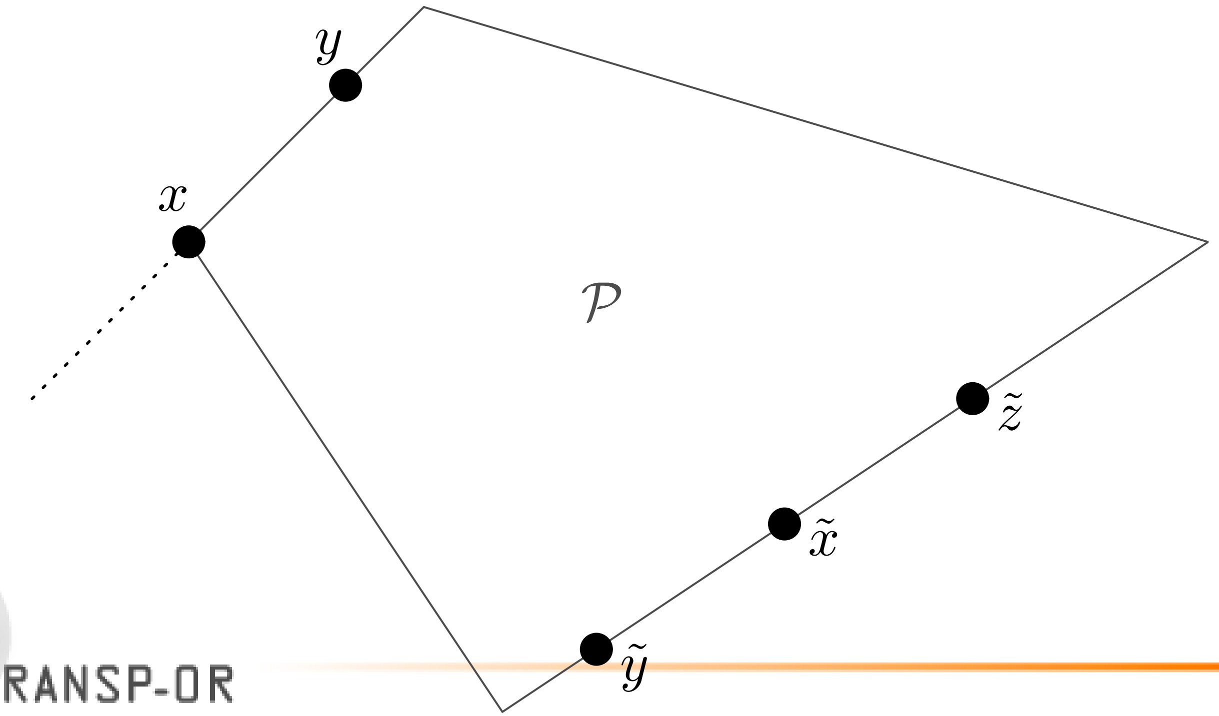
Pour l'optimisation, les sommets du polytope sont importants

Polytope

Sommet

Soit $\mathcal{P}$ un polytope. Un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est un sommet de $\mathcal{P}$ s'il est impossible de trouver deux vecteurs y et z dans $\mathcal{P}$, différents de x tels que x soit combinaison convexe de y et z, c'est-à-dire tels qu'il existe un réel $0 < \lambda < 1$ tel que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z.$$



Polytope : identification des sommets

- Soit un polytope en forme standard
- Pour identifier un de ses sommets, appliquer la procédure suivante :
  1. Choisir m variables à éliminer.
  2. Identifier la matrice B rassemblant les colonnes de A correspondantes.
  3. Poser $x_N = 0$,
  4. Dans ce cas, $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$ s'écrit $x_B = B^{-1}b$. Si $x_B \geq 0$, alors

$$x = P\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_B \\ 0_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}$$

  est un sommet du polytope. (p. 91)

Polytope : solution de base

Solution de base

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope en forme standard, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ est appelé solution de base *de $\mathcal{P}$ s'il existe des indices $j_1, \ldots, j_m$ tels que*

1. *la matrice $B = (A_{j_1} \cdots A_{j_m})$ composée des colonnes $j_1, \ldots, j_m$ de la matrice A est non singulière et*
2. *$x_i = 0$ si $i \neq j_1, \ldots, j_m$.*

Si de plus $B^{-1}b \geq 0$, le vecteur x est appelé solution de base admissible*.*

- Les variables $j_1, \ldots, j_m$ s'appellent les *variables en base*
- Les autres s'appellent les *variables hors-base*

Polytope : solution de base

Equivalence entre sommets et solutions de base admissible

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ *un polytope. Le point* $x^* \in \mathcal{P}$ *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *si et seulement s'il est une solution de base admissible.*

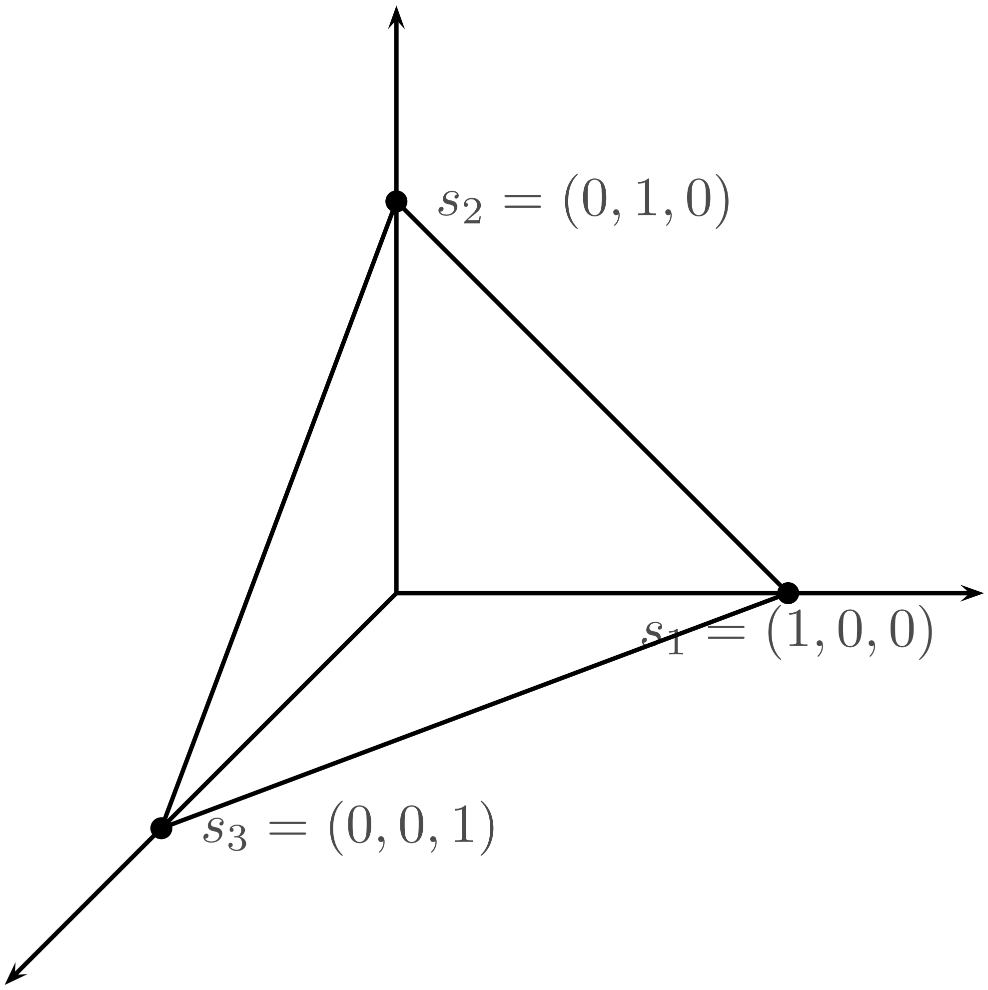
(p. 98)

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple 1

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



Exemple 1

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

$$A = (1\ 1\ 1),\ b = 1,\ m = 1,\ n = 3.$$

- Choix de la colonne en base : $j = 1$
- $B = 1$
- $x_1 = B^{-1}b = 1 \geq 0$
- Variables hors-base : $x_2 = x_3 = x_4 = 0$
- Solution de base admissible:

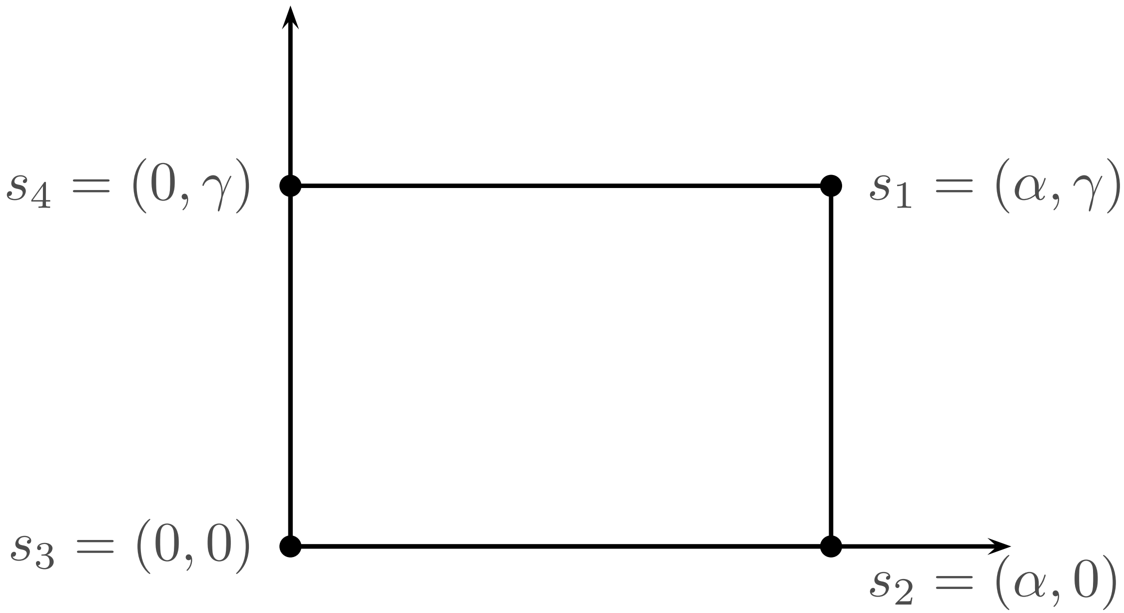
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple 2

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_1 \leq \alpha, 0 \leq x_2 \leq \gamma\}$$



Exemple 2

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_1 \leq \alpha, 0 \leq x_2 \leq \gamma\}$$

Forme standard :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_3 = \alpha,\ x_2 + x_4 = \gamma, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix},\ n = 4, m = 2$$

- Variables en base : 1, 2
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_3 = x_4 = 0$
- Solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Cela correspond à s_1

Exemple 2

- Variables en base : 2, 3

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_1 = x_4 = 0$
- Solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Cela correspond à s_4

Exemple 2

Possibilités d'être en base :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ici, $n = 4$, $m = 2$, donc 6 possibilités :

- 1 et 2 : s_1
- 1 et 3 : dépendance linéaire
- 1 et 4 : s_2
- 2 et 3 : s_4
- 2 et 4 : dépendance linéaire
- 3 et 4 : s_3

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; n = 7, \; m = 4$$

- Variables en base : 4, 5, 6, 7
- Matrice de base :

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- Solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : autre base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; n = 7, \; m = 4$$

- Variables en base : 3, 5, 6, 7
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple 3 : autre base

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_1 = x_2 = x_4 = 0$.
- Solution de base non admissible, car $x_5 = -12 \not\geq 0$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solution de base dégénérée

Solution de base dégénérée

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope en forme standard, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Une solution de base $x \in \mathbb{R}^n$ est dite dégénérée *si plus de n contraintes sont actives en x, c'est-à-dire si plus de $n - m$ composantes de x sont nulles.*

- Dans ce cas, au moins une variable en base est nulle
- Plusieurs bases peuvent correspondre à la même solution

Exemple 3 : base dégénérée 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; n = 7, \; m = 4$$

- Variables en base : 1, 2, 3, 7
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : base dégénérée 1

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.
- Solution de base dégénérée, car $x_2 = 0$ est en base :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : base dégénérée 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; n = 7, \; m = 4$$

- Variables en base : 1, 3, 5, 7
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : base dégénérée 2

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_2 = x_4 = x_6 = 0$.
- Solution de base dégénérée, car $x_5 = 0$ est en base :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Idées algorithmiques

- La solution du problème d'optimisation se trouve sur un sommet du polytope
- Une solution de base admissible correspond à un sommet
- Une solution de base admissible est obtenue en choisissant quelles variables sont en bases
- Proposition d'algorithme :
  1. Enumérer les solutions de base admissible
  2. Pour chacune d'elle, calculer la fonction objectif $c^T x$
  3. Identifier celle qui correspond à la plus petite valeur
- Nécessite de considérer

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

possibilités.

Idées algorithmiques

- Ce nombre explose exponentiellement avec n et m
- Supposons qu'il faille 1/100ième de seconde pour évaluer une solution
- Si $n = 40$ et $m = 20$, il faudra 44 ans pour trouver la solution
- Si $n = 60$ et $m = 30$, il faudra 37.4 millions d'années pour trouver la solution
- Si $n = 80$ et $m = 40$, il faudra 341 milliards de siècles pour trouver la solution

Autre idée : algorithme itératif

- Démarrer d'un sommet
- Identifier une direction
  - admissible
  - de descente
- Calculer un pas qui mène à un autre sommet.

Direction admissible

Direction admissible

Soit le problème général d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sous contraintes

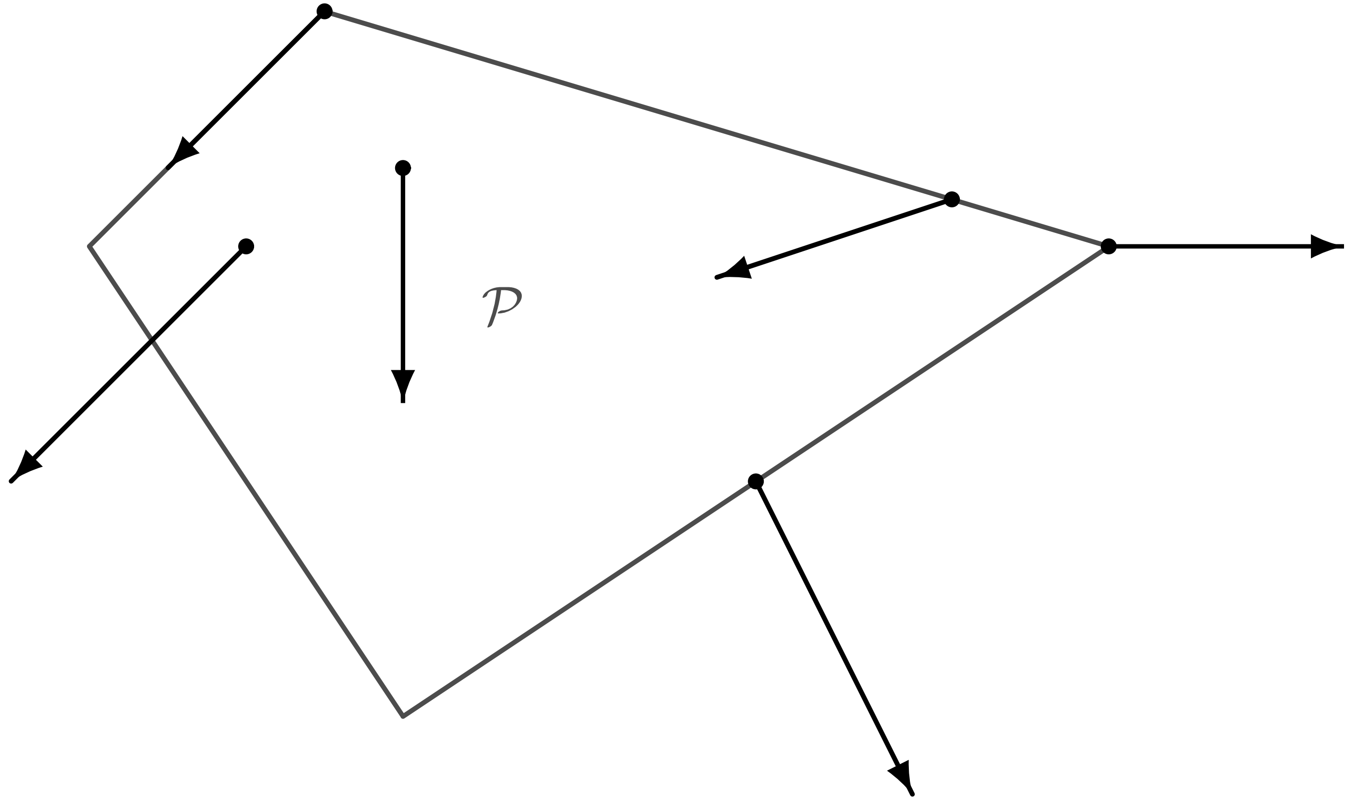
$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \\ g(x) &\leq 0, \end{aligned}$$

et soit un point $x \in \mathbb{R}^n$ admissible. *Une direction* d *sera dite admissible en* x *s'il existe* $\eta > 0$ *tel que* $x + \alpha d$ *soit admissible pour tout* $0 < \alpha \leq \eta$.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Direction admissible



Direction admissible

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$Ax = b, \quad x \geq 0.$$

- Soit une direction $d \in \mathbb{R}^n$.
- Considérons $x + \alpha d$, avec $0 < \alpha \leq \eta$
- Condition nécessaire pour d admissible :

$$A(x + \alpha d) = Ax + \alpha Ad = b$$

- Comme $Ax = b$, la condition s'écrit

$$Ad = 0.$$

- Il faut encore vérifier que $x + \alpha d \geq 0$.

Direction admissible

- Soit une solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Considérons une direction $d \in \mathbb{R}^n$ décomposée de la même manière :

$$d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$$

- La condition $Ad = 0$ s'écrit

$$Bd_B + Nd_N = 0$$

et donc

$$d_B = -B^{-1}Nd_N$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Direction admissible

- Le choix d'une direction admissible se ramène au choix de d_N
- Choisissons une variable hors-base j
- Définissons :

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow j\text{ième position} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Direction admissible

- La partie en base s'écrit

$$d_B = -B^{-1} N d_N = -B^{-1} A_k.$$

  où $A_k = N d_N$ est la $k$ième colonne de la matrice N.
- A_k est la colonne de A correspondant à la variable hors-base k.

Direction admissible

- Il faut aussi garantir que $x + \alpha d \geq 0$.
  - Variables hors-base :
    - $(x)_k$ était nulle et devient positive : $(x)_k + \alpha(d_k)_k = \alpha > 0$
    - $(x)_i$, $i \neq k$ restent à zéro: $(x)_i + \alpha(d_k)_i = (x)_i \geq 0$
  - Variables de base :
    - Si x est non dégénérée, les variables de base sont strictement positives. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que $x_B + \alpha d_B \geq 0$, $0 < \alpha \leq \eta$.
    - Si x est dégénérée, il n'y a pas de garantie que la direction de base soit admissible.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Direction de base

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope en forme standard, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$ et $x \in \mathbb{R}^n$ une solution de base admissible de $\mathcal{P}$. Une direction d est appelée $k$ème direction de base en x si k est l'indice d'une variable hors base, et

$$d_k = P \begin{pmatrix} d_{B_k} \\ d_{N_k} \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de permutation correspondant à la solution de base x, $d_{B_k} = -B^{-1}A_k$, et d_{N_k} est tel que

$$P^T e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{N_k} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que tous les éléments de d_{N_k} sont nuls, sauf celui correspondant à la variable k qui vaut 1.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

Forme standard :

$$\mathcal{P} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

avec

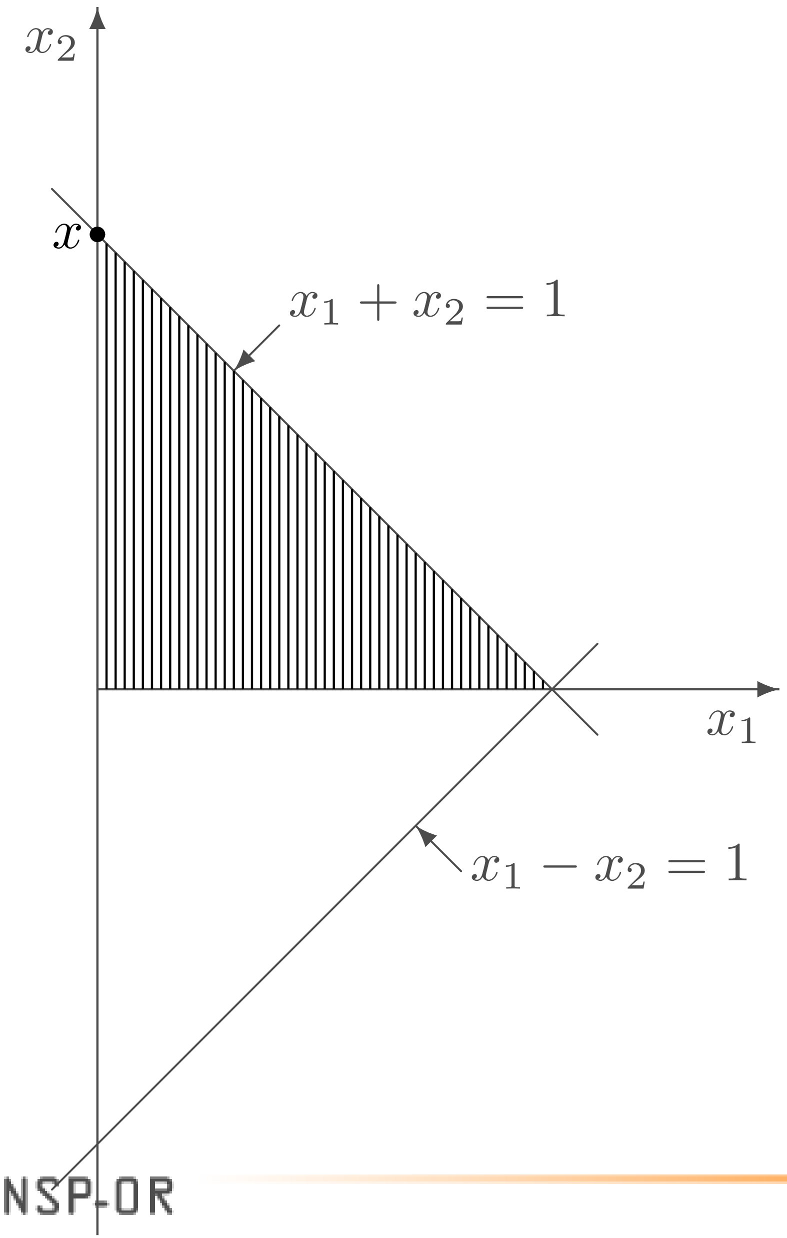
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

- Variables en base : 2 et 4
- Variables hors-base : 1 et 3
- Solution de base admissible :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple



$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple

- Direction de base correspondant à x_1

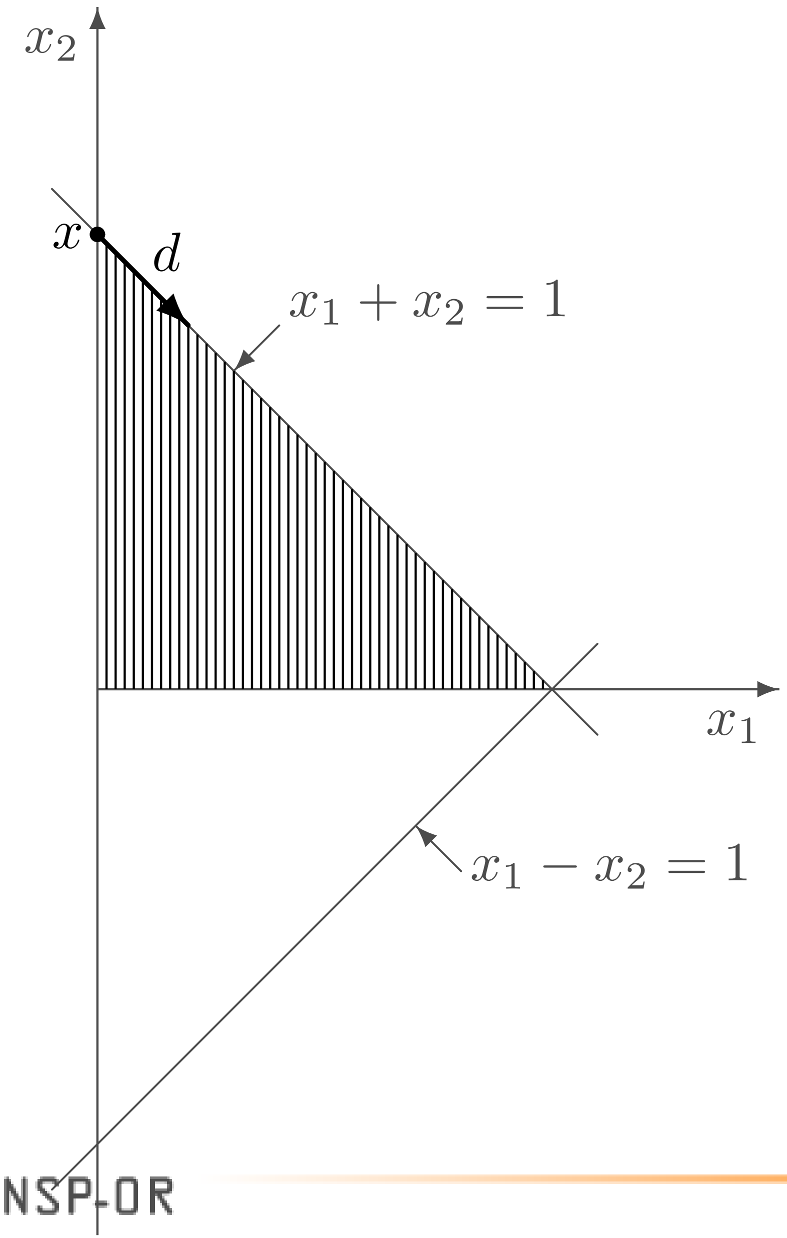
$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_1 \\ (d)_3 \end{pmatrix}$$

$$d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_2 \\ (d)_4 \end{pmatrix}$$

En rassemblant les deux parties :

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; x+\alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \\ 2-2\alpha \end{pmatrix} \geq 0 \text{ si } \alpha \leq 1.$$

Exemple



$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple

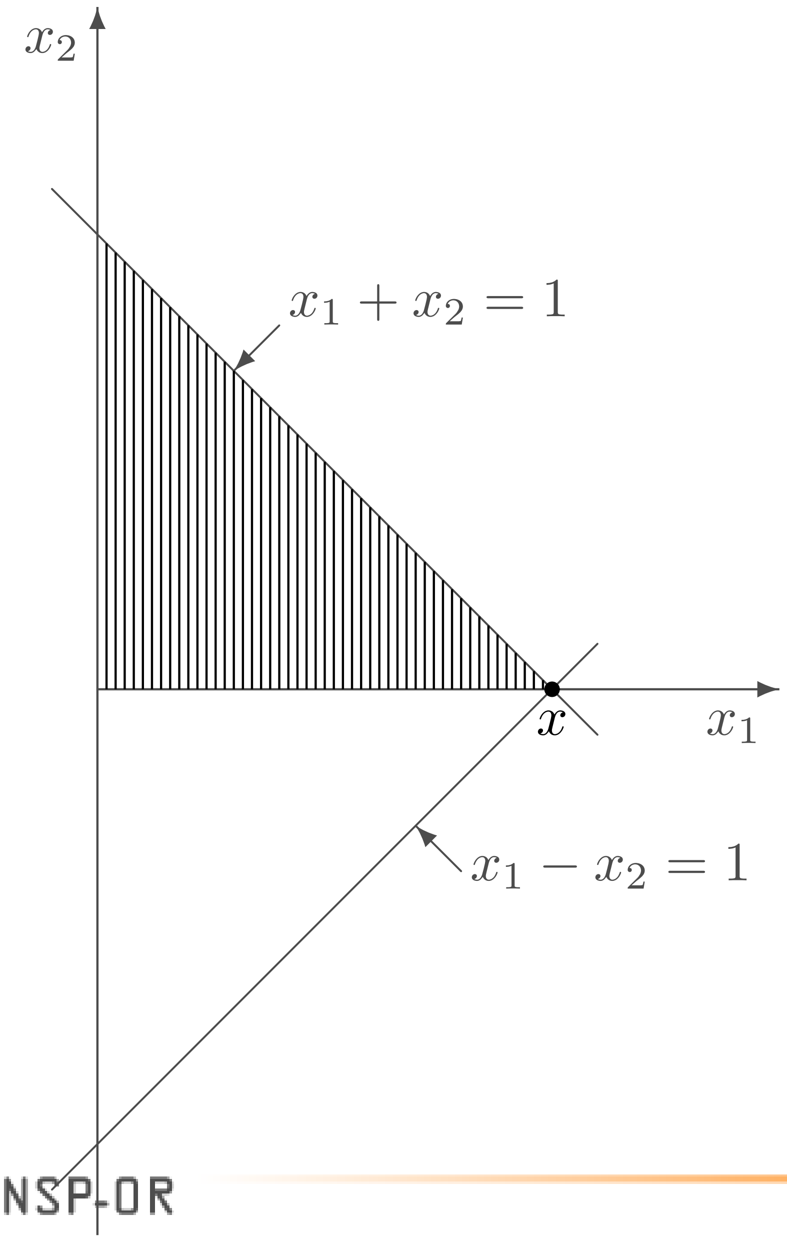
- Variables en base : 1 et 2
- Variables hors-base : 3 et 4
- Solution de base admissible :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple



$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple

- Direction de base correspondant à x_3

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_3 \\ (d)_4 \end{pmatrix}$$

$$d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_1 \\ (d)_2 \end{pmatrix}$$

En rassemblant les deux parties :

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x + \alpha d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

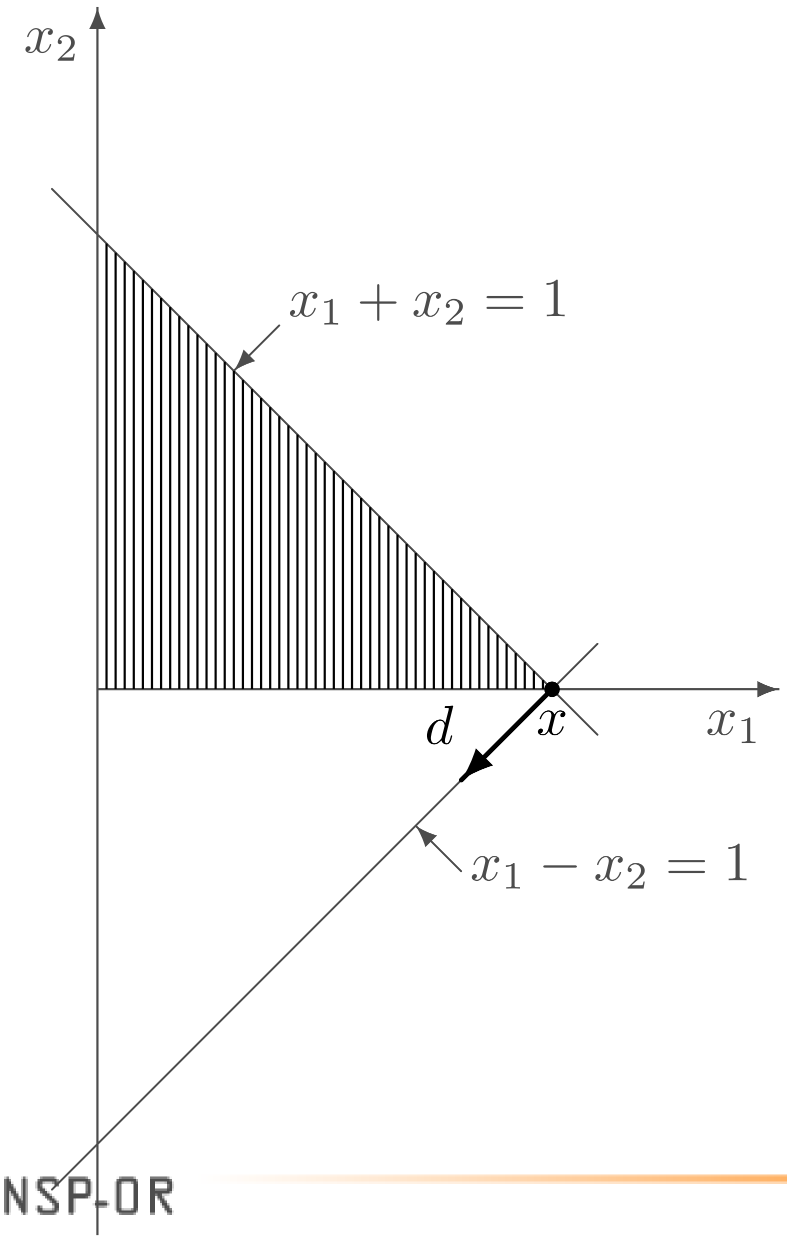
Exemple

- La solution

$$x + \alpha d = \begin{pmatrix} 1 - \alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

  n'est admissible pour aucun $\alpha > 0$.
- La direction de base n'est pas admissible.
- La solution de base admissible est dégénérée.

Exemple



$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Direction de descente

- Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ une solution de base admissible
- Soit $d_j = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$ la direction de base admissible correspondant à la variable hors-base j
- Quelle est la pente de la fonction en x dans la direction d_j ?

$$\nabla f(x)^T d_j = c^T d_j = c_B^T d_B + c_N^T d_N = -c_B^T B^{-1} A_j + c_j$$

- Cette quantité est appelée *coût réduit*

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Direction de descente

- Si le coût réduit $\bar{c}_j$ est négatif, alors la $j$ième direction de base est une direction de descente.
- Si tous les coûts réduits sont positifs, il n'existe pas de direction de descente, et x est la solution optimale du problème.
- Conditions d'optimalité

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Conditions d'optimalité

Conditions nécessaires *Soit un problème d'optimisation linéaire, et x^* une solution de base non dégénérée du polytope des contraintes. Si x^* est solution optimale du problème, alors $\bar{c} \geq 0$.*

(p. 180)

Conditions suffisantes *Soit un problème d'optimisation linéaire, et x^* une solution de base admissible du polytope des contraintes. Si $\bar{c} \geq 0$, alors x^* est optimal.*

(p. 181)

Algorithme du simplexe

Idée :

- Partir d'une solution de base admissible.
- Si tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, on a trouvé la solution.
- Sinon, choisir une direction de base correspondant à un coût réduit négatif (direction de descente).
- Avancer le long de cette direction (calcul du pas) pour atteindre un autre sommet.

Calcul du pas

- Soit x une solution de base admissible
- Soit d_j une direction de base correspondant à un coût réduit négatif (direction de descente).
- Avancer d'un pas α le plus grand possible tel que

$$x^+ = x + \alpha d_j \geq 0$$

- Exemple :

$$x^+ = x + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \\ 2-2\alpha \end{pmatrix} \geq 0 \text{ si } \alpha \leq 1.$$

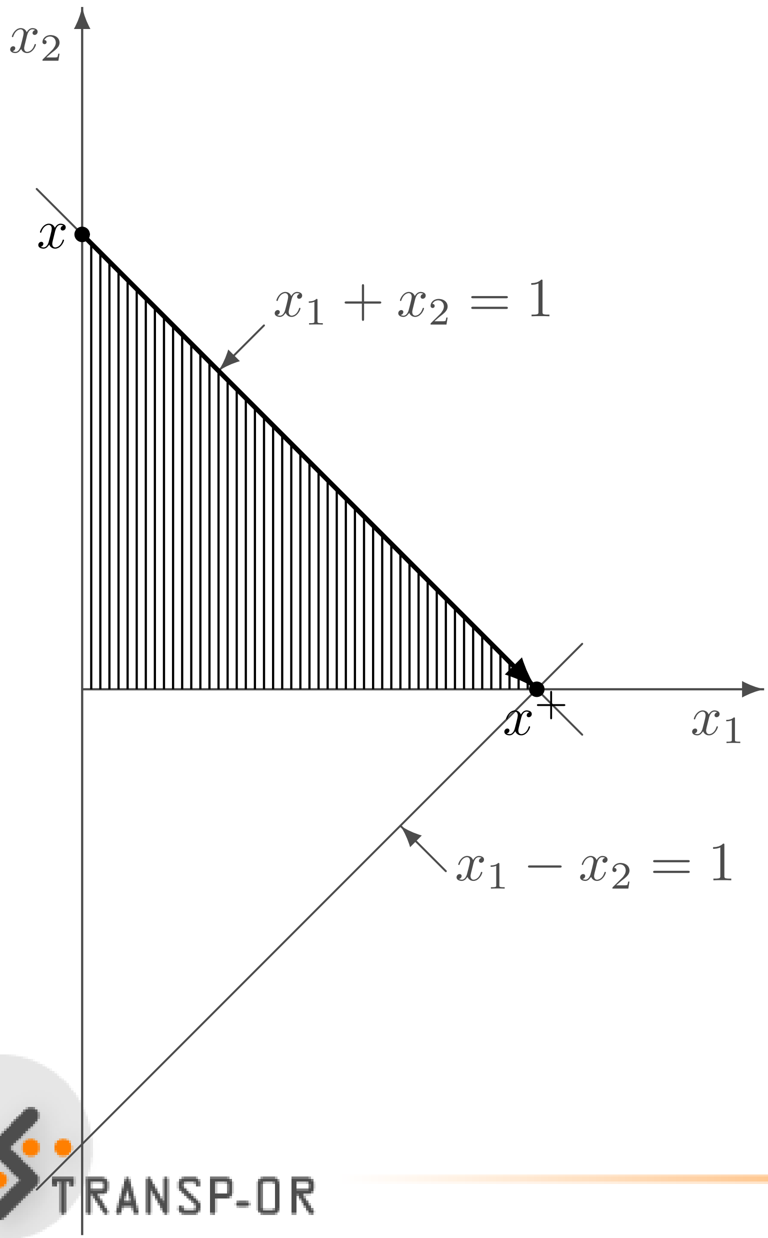
- Choisir $\alpha = 1$

Calcul du pas

$$x^+ = x + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \\ 2-2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Forcément, une variable en base va prendre la valeur 0.
- Cette variable sort de la base en x^+.
- La variable hors-base correspondant à la direction de base prend sa place.
- Une itération correspond donc à un échange de variables dans la base.

Calcul du pas



Calcul du pas

$$x + \theta d \geq 0$$

- Seules les composantes k telles que $(d)_k < 0$ risquent de poser problème.
- Celles-ci correspondent forcément à des variables en base.
- S'il n'y en a pas, le problème est non borné.
- Calculer pour chacune d'elles la distance à la contrainte :

$$-\frac{(x_k)_i}{(d_j)_i}$$

- et choisir la plus petite valeur

$$\theta = \begin{cases} -\frac{(x_k)_i}{(d_j)_i} & \text{si } (d_j)_i < 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Algorithme du simplexe

Objectif

Trouver le minimum global d'un problème linéaire en forme standard

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$Ax = b \; x \geq 0.$$

Entrées

- La matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- Le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$;
- Le vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$.
- $J^0 = (j_1^0, \ldots, j_m^0)$ l'ensemble des indices des variables de base correspondant à une solution de base admissible.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme du simplexe

Sorties

- Un indicateur booléen U identifiant un problème non borné;
- Si U est faux, $J^* = (j_1^*, \ldots, j_m^*)$ l'ensemble des indices des variables de base correspondant à une solution de base admissible optimale, en cas d'existence de celle-ci.

Initialisation

$k = 0$.

Algorithme du simplexe

Itérations

1. Soit $B = (A_{j_1^k}, \ldots, A_{j_m^k})$ la matrice formée par les colonnes de A correspondant aux indices de J_k.
2. Identifier l'indice $j \notin J^k$ le plus petit (règle de Bland) tel que le coût réduit associé

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$$

   soit strictement négatif (A_j est la $j$ème colonne de A). S'il n'en existe pas, la solution courante est optimale. $J^* = J^k$, U=FAUX. STOP.
3. Soit P la matrice de permutation telle que

$$AP = (B|N).$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

4. Calculer

$$x_k = P \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}.$$

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

5. Calculer la $j$ième direction de base

$$d_j = P \begin{pmatrix} d_{B_j} \\ d_{N_j} \end{pmatrix}$$

avec $d_{B_j} = -B^{-1}A_j$, et d_{N_j} est tel que

$$P^T e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{N_j} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

c'est-à-dire que tous les éléments de d_{N_j} sont nuls, sauf celui correspondant à la variable j qui vaut 1.

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

6. Pour chaque indice, calculer la distance à la contrainte $x_i \geq 0$, c'est-à-dire

$$\lambda_i = \begin{cases} -\frac{(x_k)_i}{(d_j)_i} & \text{si } (d_j)_i < 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

7. Soit ℓ le plus petit indice (règle de Bland) tel que

$$\lambda_\ell = \min_i \lambda_i.$$

8. Si $\lambda_\ell = +\infty$, le problème est non borné, et aucune solution n'existe. U=VRAI. STOP.

- L'indice j intègre la base, et l'indice ℓ la quitte, i.e. $J^{k+1} = J^k \cup \{j\} \setminus \ell$, $k = k+1$.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Tableau du simplexe

L'algorithme exige des calculs importants en algèbre linéaire, impliquant la matrice B^{-1} :

- Pas 2: le calcul des coûts réduits $c^T - c_B^T B^{-1} A$;
- Pas 4: le calcul de l'itéré courant $B^{-1} b$;
- Pas 5: le calcul de la direction $-B^{-1} A_j$.

Idée :

- regrouper toutes les quantités importantes dans un tableau,
- utiliser le tableau pour effectuer les calculs lors d'une itération,
- mettre à jour le tableau pour qu'il garde ses propriétés.

Tableau du simplexe

Soit un problème linéaire en forme standard $\min c^T x$ sous contraintes $Ax = b$, $x \geq 0$, et soit une matrice de base B correspondant à une solution de base admissible $\tilde{x}$. Le tableau

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c_B^T B^{-1} A$	$-c_B^T B^{-1} b$

est appelé le *tableau du simplexe* correspondant à cette solution de base admissible. D'une manière plus détaillée, nous avons

$$
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
 & & & \tilde{x}_{j_1} \\
B^{-1}A_1 & \cdots & B^{-1}A_n & \vdots \\
 & & & \tilde{x}_{j_m} \\
\hline
\bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n & -c^T \tilde{x} \\
\hline
\end{array}
\qquad (4)
$$

où $\bar{c}_i$ est le coût réduit de la variable i.

Tableau du simplexe

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Variables en base : 2 et 4

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	1	0	1	x_2
2	0	1	1	2	x_4
1	0	2	0	2	$-c^Tx$

Variables en base

- Colonne partie gauche = variable du problème.
- Colonnes des variables en base forment la matrice identité.
- Ligne partie supérieure = variable en base.
- Dernière colonne, partie supérieure : valeur des variables en base.
- Les autres variables sont toujours nulles.

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	1	0	1	x_2
2	0	1	1	2	x_4
1	0	2	0	2	$-c^T x$

Variables en base

- Dernier élément de la dernière colonne : fonction objectif, **changée de signe**.

$$-c^T x = -c_B^T x_B - c_N^T x_N = -c_B^T B^{-1} b - 0.$$

Tableau du simplexe

- Les quantités nécessaires à l'algorithme sont lues directement dans le tableau
- Appliquons une itération de l'algorithme en utilisant le tableau.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Variables en base : 4, 5, 6

$$B = B^{-1} = I, \quad c_B = 0.$$

Le tableau se simplifie.

Exemple

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c_B^T B^{-1} A$	$-c_B^T B^{-1} b$

devient

A	b
c^T	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

Exemple

Choix de la variable hors-base à introduire dans la base : coûts réduits négatifs

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

- Règle de Bland : prendre celui le plus à gauche : variable 1

Exemple

Direction de base : $d_B = -B^{-1}A_1$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$$d_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple

Pas maximum : $-x_i/d_i = x_i/(-d_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

λ_4 = 20

Exemple

Pas maximum : $-x_i/d_i = x_i/(-d_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	λ_4 = 20
2	1	2	0	1	0	20	λ_5 = 10
2	2	1	0	0	1	20	
-10	-12	-12	0	0	0	0	

Exemple

Pas maximum : $-x_i/d_i = x_i/(-d_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	λ_4 = 20
2	1	2	0	1	0	20	λ_5 = 10
2	2	1	0	0	1	20	λ_6 = 10
-10	-12	-12	0	0	0	0	

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	$\lambda_4 = 20$
2	1	2	0	1	0	20	$\lambda_5 = 10$
2	2	1	0	0	1	20	$\lambda_6 = 10$
-10	-12	-12	0	0	0	0	

- Valeur minimale : 10
- Atteinte pour x_5 et x_6.
- Règle de Bland : choisir le plus petit indice
- Ainsi, lors de cette itération :
  - x_1 rentre dans la base
  - x_5 en sort
- Variables en base : 1,4,6.
- Comment construire le tableau pour cette nouvelle base ?

Changement de base

Vocabulaire :

- Colonne du pivot : colonne correspondant à la variable hors-base qui va rentrer dans la base
- Ligne du pivot : ligne correspondant à la variable en base qui va sortir de la base
- Pivot : élément du tableau sur la ligne et la colonne du pivot.

Changement de base

- Soit la matrice de base B au début de l'itération
- Lors de l'itération, la variable j entre dans la base, et la variable k en sort.
- La nouvelle matrice de base $\bar{B}$ est identique à B, sauf pour la colonne k qui est remplacée par la colonne j.
- Le tableau au début de l'itération implique B^{-1}.
- Le tableau à la fin début de l'itération implique $\bar{B}^{-1}$.
- Question : quelles transformations faut il appliquer à B^{-1} pour obtenir $\bar{B}^{-1}$?
- Définir une matrice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telle que

$$QB^{-1} = \bar{B}^{-1}, \text{ ou encore } QB^{-1}\bar{B} = I.$$

- Quelles transformations faut il appliquer à $B^{-1}\bar{B}$ pour obtenir la matrice identité ?

Changement de base

$B^{-1}\bar{B}$ est déjà “presque” la matrice identité

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & u_1 & & 0 \\ 0 & 1 & & u_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_\ell & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & u_m & & 1 \end{pmatrix},$$

avec $u = -d_j = B^{-1}A_j$.

Opérations élémentaires de ligne

Opération élémentaire de ligne

Soit une matrice A. Une opération élémentaire de ligne *sur A consiste à multiplier par une constante β une ligne j de A, et l'ajouter à la ligne i*

$$a_i = a_i + \beta a_j.$$

Cette opération revient à pré-multiplier A par la matrice Q_{ij} qui est la matrice identité (dimension ligne de A) dont l'élément (i,j) est remplacé par β.

Exemple avec $i = 2$, $j = 1$, $\beta = 4$. $\bar{A} = Q_{ij}A$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 12 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Changement de base

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & u_1 & & 0 \\ 0 & 1 & & u_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_\ell & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & u_m & & 1 \end{pmatrix},$$

- Pour toute ligne $i \neq \ell$, on ajoute la ligne ℓ multipliée par $-u_i/u_\ell$ à la $i$ème ligne.
- Noter que $u_\ell = -(d_j)_\ell$ est non nul.
- La ligne ℓ est divisée par u_ℓ.

Changement de base: exemple

- Ancienne base: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Nouvelle base: $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & u_\ell & 0 \\ 0 & u_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Changement de base: exemple

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & u_\ell & 0 \\ 0 & u_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour toute ligne $i \neq \ell$, on ajoute la ligne ℓ multipliée par $-u_i/u_\ell$ à la $i$ème ligne.

- $i = 1 : -u_1/u_\ell = -1/2 : Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $i = 3 : -u_3/u_\ell = -2/2 = -1 : Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Changement de base: exemple

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & u_\ell & 0 \\ 0 & u_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 Q_1 B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Changement de base: exemple

$$Q_3 Q_1 B^{-1} \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ligne ℓ est divisée par u_ℓ.

$$Q_\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_\ell Q_3 Q_1 B^{-1} \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Changement de base

Dans le tableau :

- considérer la colonne du pivot,
- après l'itération, elle correspondra à une variable en base,
- elle doit donc être transformée en une colonne de la matrice identité.
- On applique donc les opérations élémentaires de ligne pour obtenir cela.

Pivotage du tableau

$$T = \begin{array}{cccccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \\
\hline
0 & 1.5 & 1 & 1 & -0.5 & 0 & 10 & x_4 \\
1 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 10 & x_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & x_6 \\
\hline
0 & -7 & -2 & 0 & 5 & 0 & 100 &
\end{array}$$

Variables en base

$$\bar{T} = \begin{array}{cccccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \\
\hline
0 & 0 & 2.5 & 1 & 1 & -1.5 & 10 & x_4 \\
1 & 0 & 1.5 & 0 & 1 & -0.5 & 10 & x_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & x_2 \\
\hline
0 & 0 & -9 & 0 & -2 & 7 & 100 &
\end{array}$$

Variables en base

Pivotage du tableau

Objectif

Mettre à jour le tableau du simplexe lors d'une itération de la méthode du simplexe.

Entrées

- Le tableau du simplexe T;
- L'indice ℓ de la ligne du pivot, c'est-à-dire la ligne correspondant à la variable en base qui va en sortir;
- L'indice j de la colonne du pivot, c'est-à-dire la colonne correspondant à la variable hors base qui va intégrer la base.

Sortie

Le tableau du simplexe $\bar{T}$ correspondant à la nouvelle base.

Initialisation

$p = T(\ell, j)$. Si $p = 0$, STOP. Impossible de pivoter.

Pivotage du tableau

Itérations

Pour tout $i = 1, \ldots, m+1$, $i \neq \ell$,

$$T(i,k) = T(i,k) - \frac{T(i,j)}{p} T(\ell,k) \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

Ensuite

$$T(\ell,k) = \frac{T(\ell,k)}{p} \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme du simplexe

Objectif

Trouver le minimum global d'un problème linéaire en forme standard.

Entrée

T_0, le tableau du simplexe correspondant à une solution de base admissible.

Sorties

- Un indicateur booléen U identifiant un problème non borné;
- Si U est faux, T^*, le tableau du simplexe correspondant à une solution de base admissible optimale.

Initialisation

$k = 0$.

Algorithme du simplexe

Itérations

1. Examiner les coûts réduits dans la dernière ligne de T_k. S'ils sont tous positifs, alors le tableau est optimal. $T^* = T_k$, U=FAUX. STOP.
2. Soit j l'indice de la colonne correspondant au coût réduit négatif le plus à gauche dans le tableau.
3. Pour chaque i, calculer la distance à la contrainte $x_i \geq 0$, c'est-à-dire

$$\lambda_i = \begin{cases} T(i, n+1)/T(i,j) & \text{si } T(i,j) > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

4. Soit ℓ le plus petit indice tel que

$$\lambda_\ell = \min_i \lambda_i.$$

5. Si $\lambda_\ell = +\infty$, le problème est non borné, et aucune solution n'existe. U=VRAI. STOP.
6. L'indice j intègre la base, et l'indice ℓ la quitte. Appliquer le pivotage au tableau T_k pour obtenir T_{k+1}. $k = k + 1$.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	λ_4 = 20
2	1	2	0	1	0	20	λ_5 = 10
2	2	1	0	0	1	20	λ_6 = 10
-10	-12	-12	0	0	0	0	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1.5	1	1	-0.5	0	10
1	0.5	1	0	0.5	0	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	-7	-2	0	5	0	100

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	1.5	1	1	-0.5	0	10	λ_4 = 20/3
1	0.5	1	0	0.5	0	10	λ_1 = 20
0	1	-1	0	-1	1	0	λ_6 = 0
0	-7	-2	0	5	0	100	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	2.5	1	1	-1.5	10
1	0	1.5	0	1	-0.5	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	0	-9	0	-2	7	100

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	2.5	1	1	-1.5	10	λ_4 = 4
1	0	1.5	0	1	-0.5	10	λ_1 = 20/3
0	1	-1	0	-1	1	0	λ_2 = $+\infty$
0	0	-9	0	-2	7	100	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	1	0.4	0.4	-0.6	4	x_3
1	0	0	-0.6	0.4	0.4	4	x_1
0	1	0	0.4	-0.6	0.4	4	x_2
0	0	0	3.6	1.6	1.6	136	

Solution optimale : $x^* = (4, 4, 4, 0, 0, 0)^T$, $c^T x^* = -136$.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Notes

- Bases dégénérées : risque de cycler
- Règle de Bland : garantie de ne jamais cycler, même avec des bases dégénérées.

Tableau initial

Comment identifier le tableau initial ?

- Cas simple : problème en forme canonique, avec $b \geq 0$.
- Cas difficile : problème général en forme standard.

Tableau initial

Soit le problème en forme canonique

$$\min c^T x$$

sous contrainte

$$\begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

avec $b \geq 0$.

Idée :

- On introduit les variables d'écart pour obtenir la forme standard.
- On inclut les variables d'écart dans la base initiale.
- La matrice de base associée est la matrice identité.
- La formulation du tableau se simplifie.

Tableau initial

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$	devient	A	b
$c^T - c_B^T B^{-1}A$	$-c_B^T B^{-1}b$		c^T	0

Attention : admissible si et seulement si $b \geq 0$

- Il s'agit de la technique utilisée lors de l'exemple précédent.
- Elle n'est malheureusement pas suffisamment générale.
- Si tous les problèmes d'optimisation linéaires peuvent toujours s'écrire en forme canonique,
- ... tous ne vérifient pas $b \geq 0$.

Tableau initial

Problème en forme standard :

$$\min c^T x$$

sous contrainte

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0. \end{array}$$

Supposons (sans perte de généralité) que $b \geq 0$.
Idée :

- Résoudre un problème auxiliaire :
  - qui soit lié au problème initial,
  - pour lequel il est simple d'identifier un tableau initial.
- On introduit une variable auxiliaire par contrainte: $y_1, \ldots, y_m$
- On remplace la fonction de coût.

Problème auxiliaire

$$\min y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 0^T x + e^T y$$

sous contraintes

$$\begin{array}{ccccc} Ax & + & y & = & b \\ x & , & y & \geq & 0. \end{array}$$

- Solution de base admissible : $x = 0$, $y = b$, $B = I$.
- Tableau initial :

A	b
$-\tilde{c}_B^T A \vert 0$	$-\tilde{c}_B^T b$

  avec $\tilde{c}_B^T = (1\ 1\ \cdots 1)$
- dernière ligne = somme des éléments de la colonne correspondante, changée de signe.
- On peut résoudre ce problème avec l'algorithme du simplexe.

Problème auxiliaire

Appelons

- P1 le problème original en forme standard
- P2 le problème auxiliaire.
- Soit x_0 une solution admissible de P1
- Donc, $Ax_0 = b$ et $x_0 \geq 0$.
- La solution $x = x_0$, $y = 0$ est donc aussi admissible pour P2.

$$Ax + y = Ax_0 = b.$$

- La fonction objectif de P2 à cette solution = $\sum_i y_i = 0$.
- Il est impossible de trouver une meilleure valeur, car la fonction objectif de P2 ne peut être négative.
- Donc $x = x_0$, $y = 0$ est solution optimale de P2.

Problème auxiliaire

Conclusion :

- Si P1 possède une solution admissible,
- alors le coût optimal de P2 est 0.

Contraposée :

- Si le coût optimal de P2 est strictement positif,
- alors P1 ne possède pas de solution admissible.

Et donc :

- Si (x^*, y^*) est solution optimale de P2,
- si le coût optimal associé est 0,
- alors, $y^* = 0$
- et $Ax^* + y^* = Ax^* = b$, et x^* est admissible pour P1.

Exemple

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 \\
 & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & = & 5 \\
 & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Exemple

Problème auxiliaire :

$$\min y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & y_1 & & & & & & & = & 3 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & & + & y_2 & & & & & = & 2 \\
 & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & & & & & + & y_3 & & & = & 5 \\
 & & & & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & & + & y_4 & = & 1 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	2	3	0	1	0	0	0	3	3/2
-1	2	6	0	0	1	0	0	2	1
0	4	9	0	0	0	1	0	5	5/4
0	0	3	1	0	0	0	1	1	$+\infty$
0	-8	-21	-1	0	0	0	0	-11	

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
2	0	-3	0	1	-1	0	0	1	1/2
-1/2	1	3	0	0	1/2	0	0	1	$+\infty$
2	0	-3	0	0	-2	1	0	1	1/2
0	0	3	1	0	0	0	1	1	$+\infty$
-4	0	3	-1	0	4	0	0	-3	

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
2	0	-3	0	1	-1	0	0	1	1/2
-1/2	1	3	0	0	1/2	0	0	1	$+\infty$
2	0	-3	0	0	-2	1	0	1	1/2
0	0	3	1	0	0	0	1	1	$+\infty$
-4	0	3	-1	0	4	0	0	-3	

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	0	1/2	$+\infty$
0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	0	5/4	5/9
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	$+\infty$
0	0	3	1	0	0	0	1	1	1/3
0	0	-3	-1	2	2	0	0	-1	

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	0	1/2	$+\infty$
0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	0	5/4	5/9
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	$+\infty$
0	0	3	1	0	0	0	1	1	1/3
0	0	-3	-1	2	2	0	0	-1	

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1	x_1
0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2	x_2
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	y_3
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	x_3
0	0	0	0	2	2	0	1	0	

Variables en base

Exemple

- Solution optimale du problème auxiliaire :

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Le coût optimal et les variables auxiliaires sont nulles.
- Le vecteur x^* est admissible pour le problème de départ.
- Utilisons le tableau final du problème P2 pour construire le tableau initial du problème P2.
- Mais il y a une variable auxiliaire en base.

Préparation du tableau

- Comme $y^* = 0$, si une variable auxiliaire est en base, la base est dégénérée.
- On peut donc échanger cette variable avec une variable x sans modifier la solution.
  - Supposons que la $k$ième variable de base soit auxiliaire.
  - Examinons la $k$ième ligne du tableau.
  - Choisir l'élément en colonne j de cette ligne tel que
    - j soit l'indice d'une variable du problème original
    - l'élément soit non nul.
  - k sort de base. j rentre en base
  - Pivotage du tableau

Préparation du tableau

Mais... cela ne fonctionne pas toujours :

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1	x_1
0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2	x_2
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	y_3
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	x_3
0	0	0	0	2	2	0	1	0	

- Cela signifie que la matrice A n'est pas de rang plein.
- La ligne en question correspond à une contrainte redondante.
- Elle peut être supprimée.

Préparation du tableau

On élimine les variables auxiliaires de la base

- soit en pivotant
- soit en supprimant les contraintes redondantes.

Pour l'exemple, on obtient

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	0	1/2	1	x_1
0	1	0	-3/4	1/2	x_2
0	0	1	1/3	1/3	x_3
-	-	-	-	-	

- Il restera à calculer les coût réduits.

Illustration des deux phases

$$\min_{x \in \mathbb{R}^5} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
-x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & = & 1 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Problème auxiliaire

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	2
1	2	0	-3	1	0	1	0	2	2
-1	-4	3	0	0	0	0	1	1	
-1	-1	-3	-1	-2	0	0	0	-5	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0	
0	-1	3	4	1	1	0	1	3	1
0	2	-3	3	-1	1	0	0	-3	

Problème auxiliaire

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0	
0	-1	3	4	1	1	0	1	3	1
0	2	-3	3	-1	1	0	0	-3	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	x_1
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0	y_2
0	-1/3	1	4/3	1/3	1/3	0	1/3	1	x_3
0	1	0	7	0	2	0	1	0	

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Problème auxiliaire

- Le coût optimal est nul.
- Solution de base admissible: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.
- La variable y_2 est en base. Elle est échangée avec x_2.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Préparation du tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	
1	3	0	4	1	1	0	0	2
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0
0	-1/3	1	4/3	1/3	1/3	0	1/3	1
0	1	0	7	0	2	0	1	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	
1	0	0	-17	1	-2	3	0	2
0	1	0	7	0	1	-1	0	0
0	0	1	3.67	1/3	2/3	-1/3	1/3	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0

Préparation du tableau

Supprimer les colonnes correspondant aux variables auxiliaires

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	-17	1	2
0	1	0	7	0	0
0	0	1	3.67	1/3	1
0	0	0	0	0	0

Calcul de la dernière ligne :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$c =$	2	3	3	1	-2	
	1	0	0	-17	1	2
	0	1	0	7	0	0
	0	0	1	3.67	1/3	1
	0	0	0	3	-5	-7

Deuxième phase

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	0	-17	1	2	2
0	1	0	7	0	0	
0	0	1	3.67	1/3	1	3
0	0	0	3	-5	-7	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	0	-17	1	2	
0	1	0	7	0	0	0
-1/3	0	1	9.33	0	1/3	0.04
5	0	0	-82	0	3	

Deuxième phase

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	0	-17	1	2	
0	1	0	7	0	0	0
-1/3	0	1	9.33	0	1/3	0.04
5	0	0	-82	0	3	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	2.43	0	0	1	2	x_5
0	0.14	0	1	0	0	x_4
-1/3	-1.33	1	0	0	1/3	x_3
5	11.71	0	0	0	3	

Solution optimale : $x^* = (0, 0, 1/3, 0, 2)$, $c^T x^* = -3$.

Algorithme complet du simplexe

Objectif

Trouver le minimum global d'un problème linéaire en forme standard.

Entrées

- La matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- Le vecteur $b \in \mathbb{R}^{m}$;
- Le vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^{n}$.

Sorties

- Un indicateur booléen U identifiant un problème non borné;
- Un indicateur booléen F identifiant un problème non admissible;
- Si U et F sont faux, T^*, le tableau du simplexe correspondant à une solution de base admissible optimale.

Algorithme complet du simplexe

Phase I

1. En multipliant certaines contraintes par -1, modifier le problème pour que $b \geq 0$.
2. Introduire les variables auxiliaires $y_1, \ldots, y_m$, et définir

$$
T_0 = \begin{array}{c|ccc|ccc|c|}
 & x_1 & \cdots & x_n & y_1 & \cdots & y_m & \\
\hline
 & & A & & & I & & b \\
\hline
 & & -e^T A & & & 0 & & -e^T b \\
\hline
\end{array}
$$

   où e est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les composantes valent 1.

3. Résoudre le problème auxiliaire en utilisant l'algorithme du simplexe pour obtenir U_0 et T_0^*.
4. Si U_0=VRAI ou si le coût optimal du problème auxiliaire est non nul, alors F=VRAI. STOP. Sinon, F=FAUX.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme complet du simplexe

Phase I (suite)

5. Pour chaque variable auxiliaire en base:
   1. Pivoter le tableau pour l'échanger avec une variable originale.
   2. Si tous les pivots potentiels sont nuls, supprimer la ligne correspondant à cette variable en base. La contrainte associée est redondante.
6. Lorsque qu'il n'y a plus de variables auxiliaires en base, supprimer les colonnes du tableau correspondantes pour obtenir le tableau $\bar{T}_0^*$

Algorithme complet du simplexe

Phase II

1. Calculer la dernière ligne de $\bar{T}_0^*$.

$$\bar{T}_0^*(m+1,j) = \begin{cases} c_j - c_B^T B^{-1} A_j & \text{si j hors base} \\ 0 & \text{si j en base} \\ -c_B^T B^{-1} b & \text{si j=n+1.} \end{cases}$$

2. Résoudre le problème en utilisant l'algorithme du simplexe pour obtenir U et T^*.