EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2011

Corrigé 6

Problème 1

a) Si les indices de base sont 1,2, et 3, la matrice de base est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dont l'inverse s'écrit:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur b étant $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, les variables de base valent $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$
La variable hors-base x_4 vaut par définition 0.
Cette solution est admissible.

b) Calculons le coût réduit pour la variable x_4:

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 1 > 0$$

La variable x_4 ne réduit pas le coût. La solution de base d'indices 1,2 et 3 correspond donc a l'optimum du problème.

Problème 2

a) On introduit les variables d'écart x_3, x_4 et x_5 :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\min & z = & -3x_1 & - & 4x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 50 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 20 \\
& & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

b) On obtient le tableau initial suivant :

$$\begin{array}{r|ccccc|c|cc}
\multicolumn{1}{r}{} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \multicolumn{1}{c}{x_5} & \multicolumn{1}{c}{} & \theta & \\
\cline{2-7}
& 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 50 & 50 & \\
T_0 = & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 & 20 & \leftarrow \\
& 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 & & \\
\cline{2-7}
& -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{r}{} & \uparrow & & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & &
\end{array}$$

Les variables en base sont x_3, x_4 et x_5. Le point extrême visité est $(0, 0)$.

$$T_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{|ccccc|c|} \multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{x_2} & \multicolumn{1}{c}{x_3} & \multicolumn{1}{c}{x_4} & \multicolumn{1}{c}{x_5} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 0 & \mathbf{2} & 1 & -1 & 0 & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ \hline 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 60 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \end{array} \begin{array}{cc} \theta & \\ 15 & \leftarrow \\ & \\ 30 & \\ & \\ & \end{array}$$

Les variables en base sont x_3, x_1 et x_5. Le point extrême visité est $(20, 0)$.

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{array}{|ccccc|c|} \multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{x_2} & \multicolumn{1}{c}{x_3} & \multicolumn{1}{c}{x_4} & \multicolumn{1}{c}{x_5} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 120 \\ \hline \end{array}$$

Les variables en base sont x_2, x_1 et x_5. Le point extrême visité est $(20, 15)$.

$$x^+ = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Tous les coûts réduits étant positifs, ce tableau est optimal. La solution optimale est $x_1^* = 20$ et $x_2^* = 15$, pour une valeur de la fonction objectif de $z^* = -120$.

Problème 3

a) On note

x_1, x_2 et x_3 les milliers de francs qui seront légués respectivement à André, Blaise et Claude ;

d_1, d_2 et d_3 les pourcentages des dépenses respectives d'André, Blaise et Claude ;

r_1, r_2 et r_3 les intérêts des investissements respectifs d'André, Blaise et Claude.

On a donc

	André	Blaise	Claude
d	2/5	3/10	1/5
r	1/6	3/7	0

Pour chaque petit-neveu, on a les relations suivantes :

argent dépensé en une année	:	$d_i \cdot x_i$
argent restant le 31 décembre	:	$x_i - d_i \cdot x_i$
intérêt reçu	:	$(x_i - d_i \cdot x_i) \cdot r_i$
argent après calcul de l'intérêt	:	$(x_i - d_i \cdot x_i) \cdot (1 + r_i)$

Grâce à ces relations on peut écrire le programme linéaire que le notaire doit résoudre.

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Max} & y = & (1-d_1)(1+r_1)x_1 & + & (1-d_2)(1+r_2)x_2 & + & (1-d_3)(1+r_3)x_3 & & \\
\text{s.c.} & & d_1x_1 & & & & & \leq & 10 \\
& & & & d_2x_2 & & & \leq & 10 \\
& & & & & & d_3x_3 & \leq & 10 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Sous forme canonique et avec les valeurs numériques le programme linéaire sécrit

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Min} & z = & -7/10x_1 & - & x_2 & - & 4/5x_3 & & \\
\text{s.c.} & & 2/5x_1 & & & & & \leq & 10 \\
& & & & 3/10x_2 & & & \leq & 10 \\
& & & & & & 1/5x_3 & \leq & 10 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Sous forme standard ce programme linéaire sécrit

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\text{Min} & z = & -7/10x_1 & - & x_2 & - & 4/5x_3 & & & & & \\
\text{s.c.} & & 2/5x_1 & & & & & + & x_4 & = & 10 & \\
& & & & 3/10x_2 & & & + & x_5 & = & 10 & \\
& & & & & & 1/5x_3 & + & x_6 & = & 10 & \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_7 & = & 100 & \\
& & & & & & & & x_i & \geq & 0 & i \in \{1, ..., 7\}
\end{array}$$

b) Après l'application de l'algorithme du simplexe, on trouve $x_1 = 50/3$, $x_2 = 100/3$ et $x_3 = 50$ avec $z = -85$.

En conséquence, le grand-oncle doit donner

$\sim$ 16'666 Frs à André,

$\sim$ 33'333 Frs à Blaise et

50'000 Frs à Claude.

Il va donc leur léguer $\sim$ 100'000 Frs et, à la fin de l'année, il leur restera 85'000 Frs.