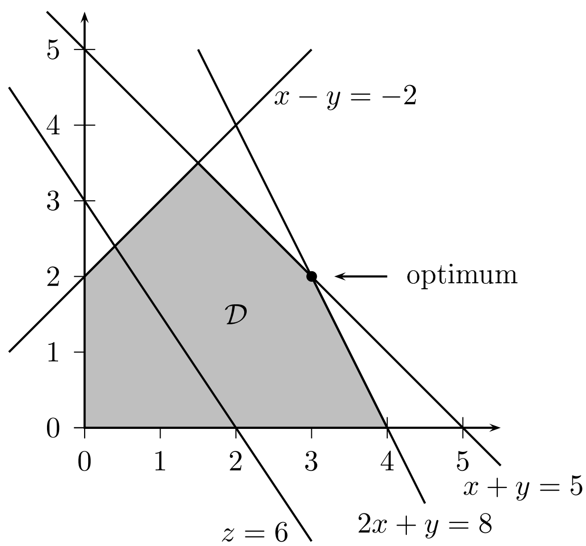
EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2011

Corrigé 5

Problème 1

a) Le domaine des solutions admissibles est :



Les sommets ou points extrêmes de $\mathcal{D}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) On détermine la solution optimale graphiquement, en représentant les lignes de niveau de z. L'optimum est atteint en $(3, 2)$ et a une valeur égale à -13.

c) Le programme linéaire sous forme canonique s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{llrcrcl}
\min & z = & -3x & - & 2y & & \\
\text{s.c.} & & -x & + & y & \leq & 2 \\
& & 2x & + & y & \leq & 8 \\
& & x & + & y & \leq & 5 \\
& & & & x & \geq & 0 \\
& & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

Mettons-le sous forme standard :

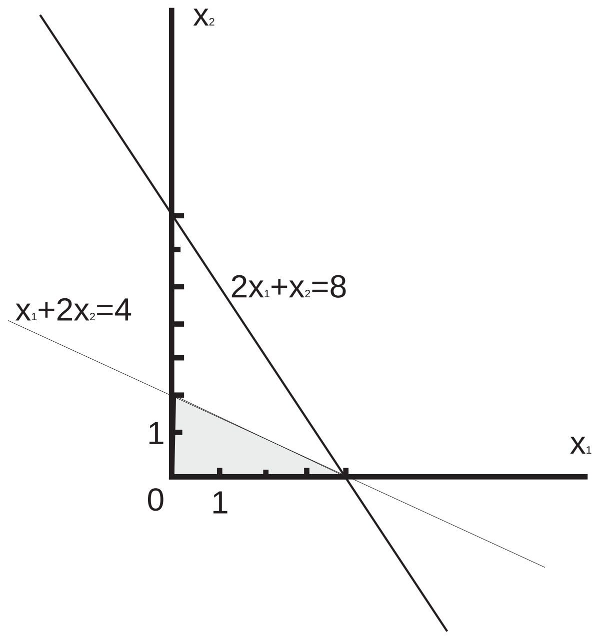
$$\begin{array}{llrcrcccccccl}
\min & z = & -3x & - & 2y & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & -x & + & y & + & a & & & & & = & 2 \\
& & 2x & + & y & & & + & b & & & = & 8 \\
& & x & + & y & & & & & + & c & = & 5 \\
& & x & , & y & , & a & , & b & , & c & \geq & 0
\end{array}$$

Problème 2

a) On introduit les variables d'écart x_3 et x_4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} \min z & = & x_1 & + & x_2 & & & & & \\ s.c. & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

b)



c) Base (x_1, x_4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Direction correspondant à x_2:

$$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ -\frac{x_4}{d_4} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 0$$

Direction correspondant à x_3:

$$d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ d_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 8$$

d) Base (x_2, x_3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

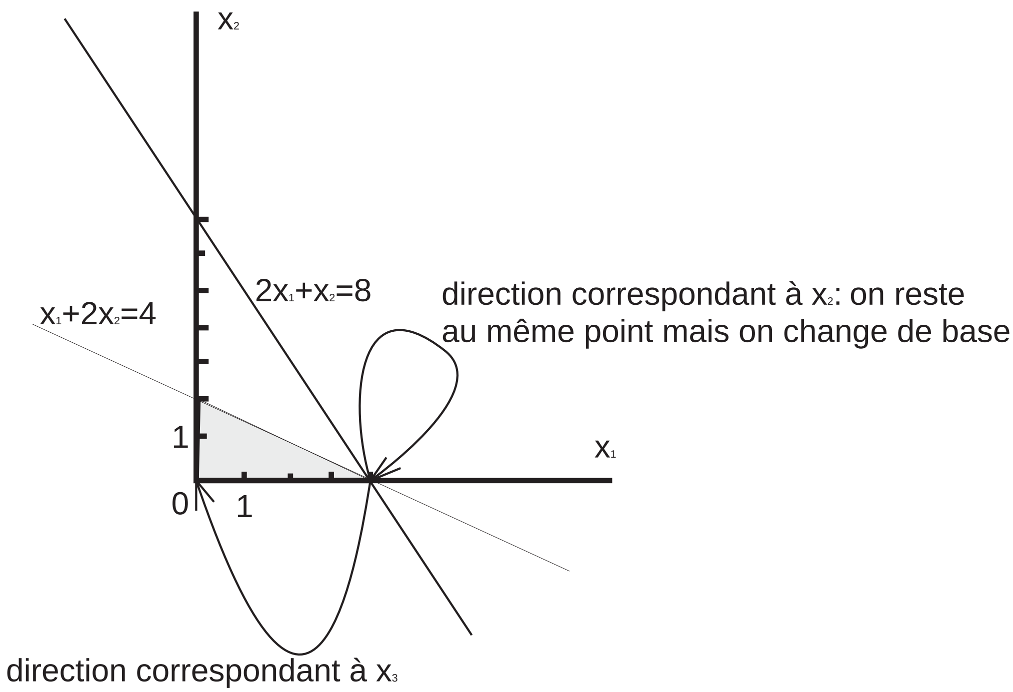
Direction correspondant à x_1:

$$d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ -\frac{x_3}{d_3} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

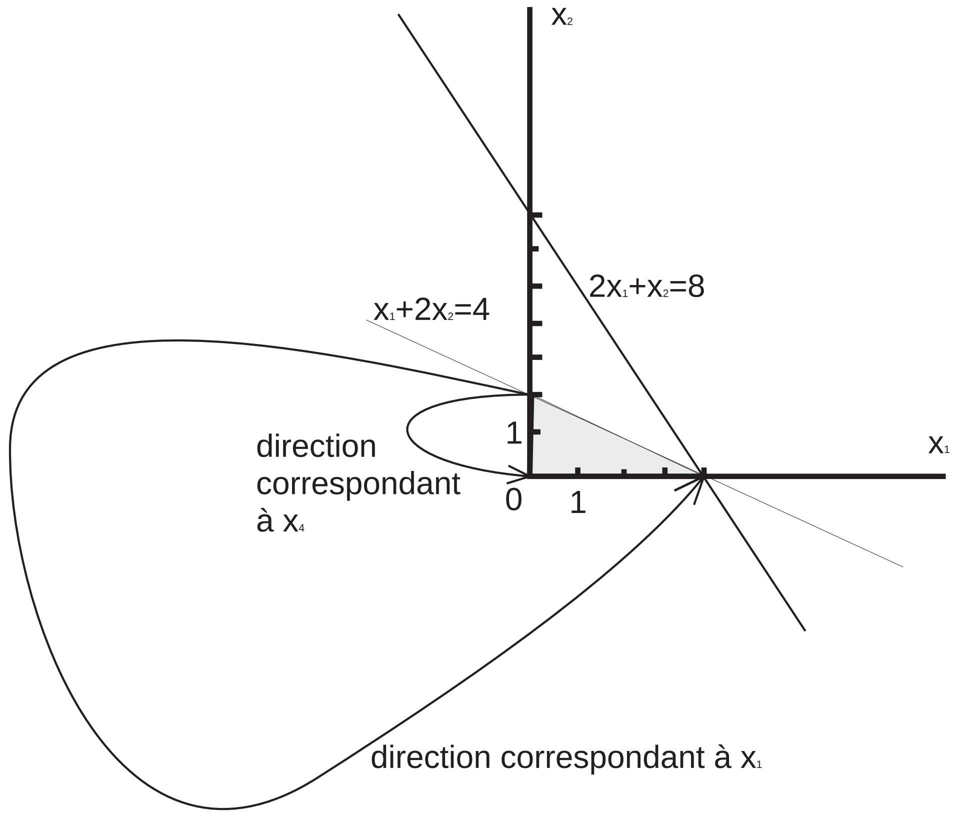
Direction correspondant à x_4:

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ d_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

e)



f)



Problème 3

a) La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

et toute base de cette matrice est formée d'une des quatre premières colonnes et de la cinquième. Les quatre bases et les solutions de basee associées sont donc

1. $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (\; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \;)^T = (\; 2 \; 0 \; 0 \; 0 \; -1 \;)^T$
2. $\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (\; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \;)^T = (\; 0 \; 1 \; 0 \; 0 \; -1 \;)^T$
3. $\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (\; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \;)^T = (\; 0 \; 0 \; 2/3 \; 0 \; -1 \;)^T$
4. $\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (\; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \;)^T = (\; 0 \; 0 \; 0 \; 1/2 \; -1 \;)^T$

Toutes ces solutions de base sont admissibles pour le système.

b) Pour une matrice 2×5, le nombre maximal de bases est $\binom{5}{2}$, c'est-à-dire 10.

March 21, 2011 – mbi/mfe