EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2012

SÉRIE D'EXERCICES 11

- Problème-type :
  1)
- Problèmes à résoudre :
  2)
- Problèmes supplémentaires :
  3)

Problème 1

Considérer le programme linéaire suivant :

$$(\text{PL}) \left\{ \begin{array}{llcrcrcl} \text{Maximiser} & z = & x_1 & + & 11x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & 10x_2 & \leq & 9 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

a) Représenter le domaine admissible du problème (PL) et déterminer sa solution optimale.

b) Si on restreint le domaine des variables x_1 et x_2 de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{N}$, quel est l'optimum du problème (PLE) ainsi obtenu ?

c) La solution optimale du problème (PLE) peut-elle être obtenue en arrondissant celle du problème (PL) ?

Problème 2

Soit le problème de sac-à-dos binaire suivant :

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcl} \text{Max}\, z & = & 13x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{s.c.} & & 6x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 12 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Pour résoudre ce problème à l'aide de la méthode de séparation et d'évaluation (branch and bound), décrivons les deux phases :

Évaluation. Pour la phase d'évaluation, on va résoudre la relaxation linéaire du problème, c'est-à-dire le programme linéaire obtenu en remplaçant les contraintes $x_i \in \{0,1\}$ $\forall i$ par $0 \leq x_i \leq 1$ $\forall i$. Pour résoudre cette relaxation, on va appliquer un algorithme glouton : on considère les objets par ordre décroissant de leur rendement $\rho_i = c_i/a_i$.

Objet i	1	2	3	4
Utilité c_i	13	16	7	4
Poids a_i	6	8	4	3
$\rho_i = c_i/a_i$	$2.1\bar{6}$	2	1.75	$1.\bar{3}$

Ici, on va les considérer dans l'ordre donné.

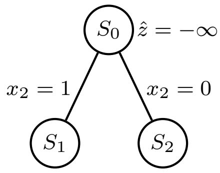
Séparation. Si la solution de la relaxation linéaire n'est pas entière, on crée deux sous-problèmes en posant, dans l'un, $x_j = 1$ et, dans l'autre, $x_j = 0$ où x_j est la variable fractionnaire dans la solution de la relaxation linéaire.

Initialisation. L'arbre d'énumération ne contient que la racine S_0 représentant le problème initial. $\hat{z} = -\infty$.(Attention, on maximise!)

Première itération. On évalue une borne supérieure $\bar{z}_0$ pour S_0 :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 6/8,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \qquad \bar{z}_0 = 25.$$

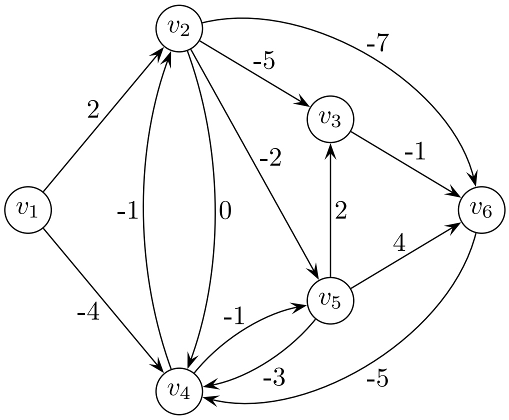
La solution n'est pas entière et $\bar{z}_0 > \hat{z}$. On sépare S_0 en créant deux sous-problèmes, avec respectivement, $x_2 = 1$ et $x_2 = 0$.



Poursuis la résolution de ce problème en commençant par traiter le sommet S_1 !

Problème 3

Soit le réseau $R = (V, E, c)$ ci-dessous :



Déterminer un plus long chemin du sommet v_1 au sommet v_6. Préciser la méthode utilisée ainsi que les étapes de la résolution.

May 11, 2012 – mbi/fsh