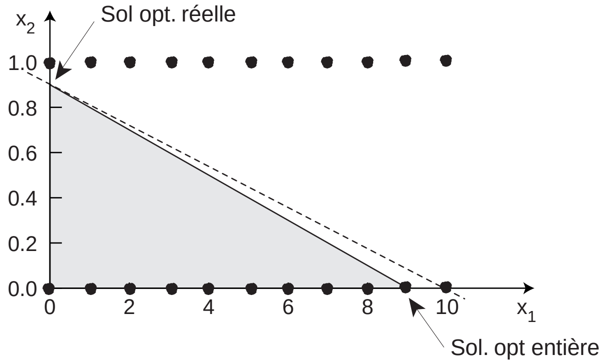
EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE GC/SIE
Printemps 2012

Corrigé 11

Problème 1

a) La solution optimale du problème est $z^* = \frac{99}{10}$, $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{9}{10}$.



b) Le nouvel optimum est $\bar{z}^* = 9, x_1^* = 9, x_2^* = 0$.

c) Non, il n'est pas possible d'obtenir la solution optimale de (PLE) en arrondissant celle de (PL). Si on arrondit par excès, le point $(0, 1)$ obtenu n'est pas admissible et si on arrondit pas défaut, le point $(0, 0)$ obtenu est admissible mais pas optimal.

De manière générale, la **relaxation linéaire** d'un **programme linéaire en nombres entiers** ne fournit qu'une *borne supérieure* sur la valeur optimale de la fonction objectif du problème. Si on cherche à arrondir la solution optimale du problème relaxé, on se retrouve confronté à deux problèmes :

1. Comment arrondir pour assurer que la solution obtenue soit admissible ?
2. Quelle est l'écart entre la valeur de la solution arrondie et la valeur optimale ?

Il n'existe pas de méthode générale pour le premier problème et le point suivant montre que lorsqu'un arrondi est possible, la qualité de la solution obtenue peut être très mauvaise.

Problème 2

Décrivons tout d'abord les deux phases de la méthode de séparation et d'évaluation.

Évaluation. Pour la phase d'évaluation, on va résoudre la relaxation linéaire du problème, c'est-à-dire le programme linéaire obtenu en remplaçant les contraintes $x_i \in \{0, 1\}$ $\forall i$ par $0 \leq x_i \leq 1$ $\forall i$. Pour résoudre cette relaxation, on va appliquer un algorithme glouton : on considère les objets par ordre décroissant de leur rendement $\rho_i = c_i/a_i$.

Objet i	1	2	3	4
Utilité c_i	13	16	7	4
Poids a_i	6	8	4	3
$\rho_i = c_i/a_i$	$2.1\bar{6}$	2	1.75	$1.\bar{3}$

Ici, on va les considérer dans l'ordre donné.

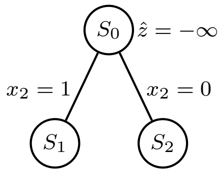
Séparation. Si la solution de la relaxation linéaire n'est pas entière, on crée deux sous-problèmes en posant, dans l'un, $x_j = 1$ et, dans l'autre, $x_j = 0$ où x_j est la variable fractionnaire dans la solution de la relaxation linéaire.

Initialisation. L'arbre d'énumération ne contient que la racine S_0 représentant le problème initial. $\hat{z} = -\infty$.

Première itération. On évalue une borne supérieure $\bar{z}_0$ pour S_0 :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 6/8,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \qquad \bar{z}_0 = 25.$$

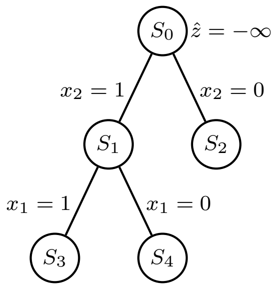
La solution n'est pas entière et $\bar{z}_0 > \hat{z}$. On sépare S_0 en créant deux sous-problèmes, avec respectivement, $x_2 = 1$ et $x_2 = 0$.



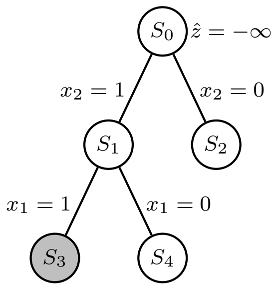
Deuxième itération. On traite le sommet actif S_1, et on évalue une borne supérieure $\bar{z}_1$ pour ce dernier :

$$x_2 = 1 \text{ (fixé)},\ x_1 = 4/6, \qquad \bar{z}_1 = 24.\bar{6}.$$

La solution n'étant pas entière et $\bar{z}_1 > \hat{z}$, on sépare S_1 en «branchant» sur x_1.



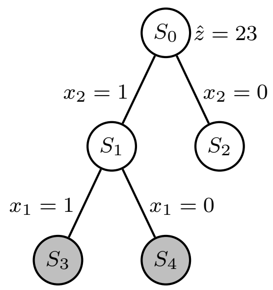
Troisième itération. On traite le sommet actif S_3. On a $x_1 = x_2 = 1$, mais $a_1 + a_2 = 14 > 12 = b$. L'ensemble Ω_3 est vide, et le sommet est sondé.



Quatrième itération. On traite le sommet actif S_4, et on évalue une borne supérieure $\bar{z}_4$ pour ce dernier :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1 \text{ (fixés)},\ x_3 = 1, \qquad \bar{z}_4 = 23.$$

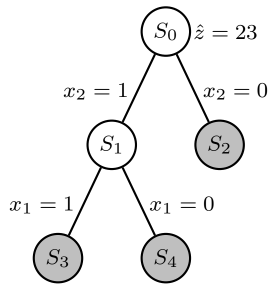
La solution est entière et $\bar{z}_4 > \hat{z}$. On met à jour $\hat{z} = 23$. Le sommet S_4 est sondé.



Cinquième itération. On traite le sommet actif S_2, et on évalue une borne supérieure $\bar{z}_2$ pour ce dernier :

$$x_2 = 0 \text{ (fixé)},\ x_1 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2/3 \qquad \bar{z}_2 = 22.\bar{6}.$$

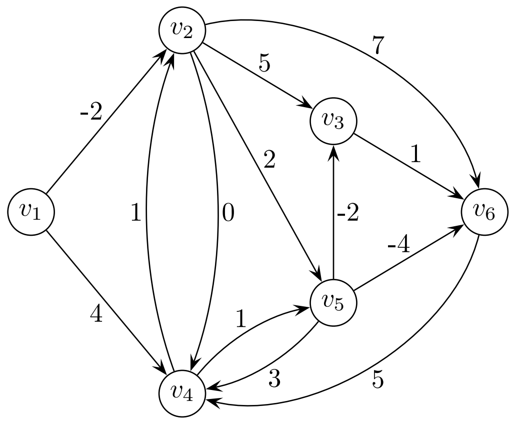
La solution n'est pas entière mais $\bar{z}_2 \leq \hat{z}$, le sommet est sondé.



Solution. La solution optimale de ce problème est donc de prendre les objets 2 et 3 pour une valeur de 23.

Problème 3

En multipliant par -1 le poids de chacune des arêtes, on ramène le problème à la recherche du plus court chemin du sommet v_1 au sommet v_6 dans le réseau $R' = (V, E, c')$ ci-dessous :



Comme ce réseau contient des arêtes de poids négatifs, on applique l'algorithme générique des plus courts chemins en retirant de L le sommet de plus petit index :

Itér.	Candidats V	Étiquettes d_i/ Prédécesseurs $p(i)$						Traiter
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
1	$\{v_1\}$	0/-	∞/-	∞/-	∞/-	∞/-	∞/-	v_1
2	$\{v_2, v_4\}$	0/-	-2/v_1	∞/-	4/v_1	∞/-	∞/-	v_2
3	$\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$	0/-	-2/v_1	3/v_2	-2/v_2	0/v_2	5/v_2	v_3
4	$\{v_4, v_5, v_6\}$	0/-	-2/v_1	3/v_2	-2/v_2	0/v_2	4/v_3	v_4
5	$\{v_5, v_6\}$	0/-	-2/v_1	3/v_2	-2/v_2	-1/v_4	4/v_3	v_5
6	$\{v_3, v_6\}$	0/-	-2/v_1	-3/v_5	-2/v_2	-1/v_4	-5/v_5	v_3
7	$\{v_6\}$	0/-	-2/v_1	-3/v_5	-2/v_2	-1/v_4	-5/v_5	v_6
8	$\varnothing$	0/-	-2/v_1	-3/v_5	-2/v_2	-1/v_4	-5/v_5	

Le plus court chemin du sommet v_1 au sommet v_6 dans R' est unique, de valeur -5 et est le chemin :

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_6.$$

C'est également le plus long chemin des sommets v_1 à v_6 dans R mais sa longueur est égale à 5.

May 11, 2012 – mbi/fsh