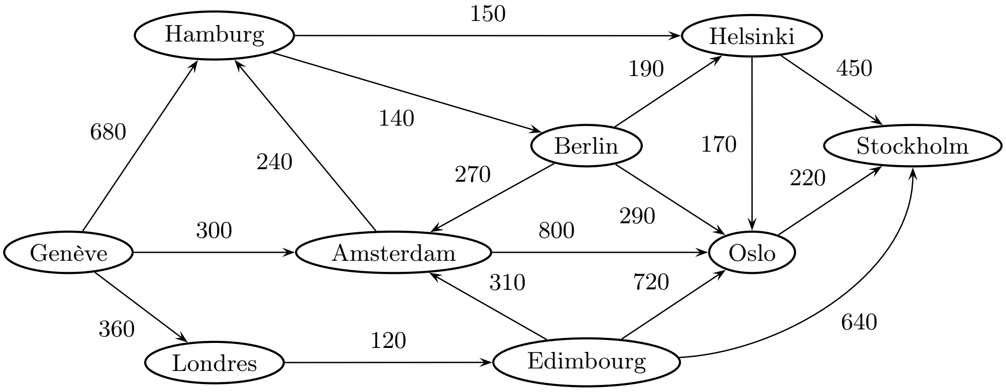
**Corrigé 10**

### Problème 1

a) Il s'agit de trouver le plus court chemin au sens du prix à payer de Genève à Stockholm. Comme le fait de passer par une ville suppose que l'on doit y rester une nuit, il faut ajouter le prix de l'hôtel correspondant à chaque arc sortant d'une ville escale. Le nouveau graphe devient :



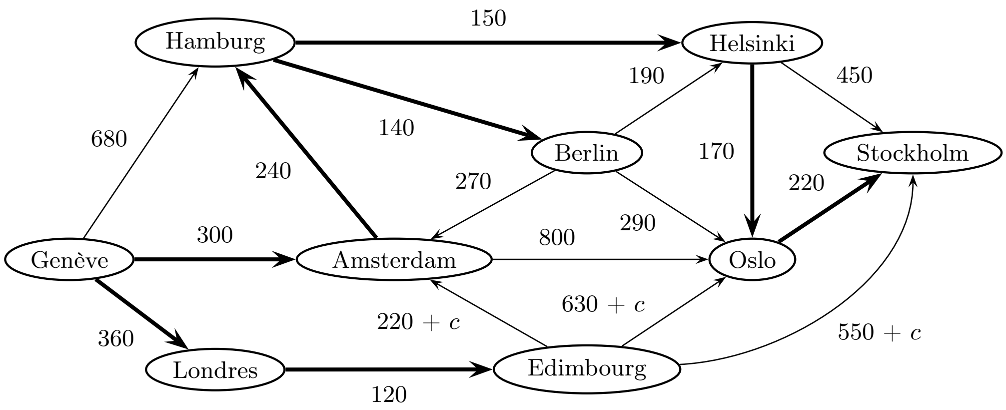

Les poids des arcs étant tous positifs on applique l'algorithme de Dijkstra, où G, A, B, E, Ha, He, L, O et S sont les initiales des villes :

| Itér. | $i_{min}$ | Étiquette $\lambda_i$/ prédécesseur $p(i)$ à la fin de l'itération | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | G | A | B | E | Ha | He | L | O | S |
| 0 | | 0/- | $\infty$/G | $\infty$/- | $\infty$/- | $\infty$/G | $\infty$/- | $\infty$/G | $\infty$/- | $\infty$/- |
| 1 | G | 0/- | 300/G | $\infty$/- | $\infty$/- | 540/A | $\infty$/- | 360/G | 1100/A | $\infty$/- |
| 2 | A | | 300/G | $\infty$/- | 480/L | 540/A | $\infty$/- | 360/G | 1100/A | $\infty$/- |
| 3 | L | | | $\infty$/- | 480/L | 540/A | $\infty$/- | 360/G | 1100/A | $\infty$/- |
| 4 | E | | | 680/Ha | 480/L | 540/A | 690/Ha | | 1100/A | 1120/E |
| 5 | Ha | | | 680/Ha | | 540/A | 690/Ha | | 970/B | 1120/E |
| 6 | B | | | 680/Ha | | | 690/Ha | | 860/He | 1120/E |
| 7 | He | | | | | | 690/Ha | | 860/He | 1080/O |
| 8 | O | | | | | | | | 860/He | 1080/O |
| 9 | S | | | | | | | | | 1080/O |

Le plus court chemin entre Genève et Stockholm coûte 1080 Frs. Le chemin optimal est :

$$Genève \longrightarrow Amsterdam \longrightarrow Hamburg \longrightarrow Helsinki \longrightarrow Oslo \longrightarrow Stockholm$$

b) Soit $c \geq 0$ le prix de la chambre à Edimbourg. Le nouveau graphe de travail est représenté ci-dessous où l'arbre optimal du point précédent est représenté en gras :




Le chemin le plus court (*i.e.* le moins cher) pour aller de Genève à Edimbourg a une longueur de $\lambda_E = 480$. Comme $\lambda_E + 630 + c > \lambda_O$ (respectivement $\lambda_E + 220 + c > \lambda_A$) $\forall c \geq 0$, le plus court chemin entre Genève et Oslo (respectivement Amsterdam) ne sera pas modifié. Par contre, on constate que $\lambda_E + 550 + c = 1030 + c \leq \lambda_O = 1080$ si $c \leq 50$. La solution actuelle n'est donc plus optimale pour $c < 50$. Comme $1030 + c$ est de toute façon plus grand que chacun des $\lambda_i$ excepté pour Stockholm, on en conclut que la seule modification par rapport à la solution actuelle est que l'on choisira d'aller à Stockholm depuis Edimbourg plutôt que depuis Oslo pour autant que $c \leq 50$. La solution optimale est donc donnée par

$$\textit{Genève} \longrightarrow \textit{Londres} \longrightarrow \textit{Edimbourg} \longrightarrow \textit{Stockholm}$$

si $c \leq 50$.

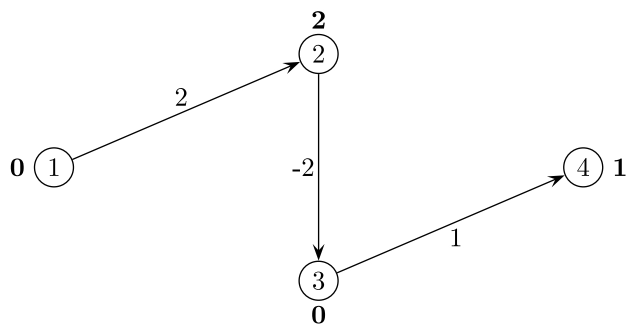
**Problème 2**

a) Le déroulement de l'algorithme est résumé dans le tableau suivant :

| Itération | $T$ | Etiquette (prédécesseur) 1 | 2 | 3 | 4 | Nœud suivant |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | {1} | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 1 |
| 2 | {2,3} | 0 | 2 (1) | 1 (1) | $\infty$ | 3 |
| 3 | {2,4} | 0 | 2 (1) | 1 (1) | 2 (3) | 2 |
| 4 | {3,4} | 0 | 2 (1) | 0 (2) | 2 (3) | 3 |
| 5 | {4} | 0 | 2 (1) | 0 (2) | 1 (3) | 4 |
| 6 | $\emptyset$ | 0 | 2 (1) | 0 (2) | 1 (3) | |

b) En effet, le sommet 3 est traité deux fois. Ceci provient du fait qu'une hypothèse sur le réseau n'est pas vérifiée : le poids de l'arc $(2, 3)$ est négatif. On remarque néanmoins que l'algorithme fonctionne correctement et fournit les plus courts chemins depuis 1.

c) L'arbre correspondant aux plus courts cheminx est représenté ci-dessous :



Les étiquettes sur les noeuds représentent les plus courtes distances du noeud 1 jusqu'au noeud courant.

d) Vérifions pour chaque noeud si les conditions sont respectées :

1. $d_1 = 0$
2. $d_2 = 2 \leq d_1 + 2$ et $d_2 = d_1 + 2$
3. $d_3 = 0 \leq d_2 - 2$, $d_3 \leq d_1 + 1$ et $d_3 = d_2 - 2$
4. $d_4 = 1 \leq d_2 + 1$, $d_4 \leq d_3 + 1$ et $d_4 = d_3 + 1$.

Toutes ces conditions sont vérifiées, la solution obtenue est donc optimale.

**Problème 3**

Première possibilité
Pour déterminer la voie la plus courte de Genève à Saint-Gall en passant par Bâle, il faut joindre bout à bout la plus courte chaîne de Genève à Bâle et celle de Bâle à Saint-Gall.
Comme le graphe est non orienté, il suffit de calculer la voie la plus courte de Bâle à tous les autres sommets. On n'appliquera donc qu'une fois un algorithme de plus courts chemins.

Deuxième possibilité
Il suffit de duppliquer le graphe et de joindre les copies par les sommets correspondant à Bâle, soit par un arc de distance nulle, soit en superposant ces deux sommets. On determine alors la voie la plus courte entre Genève et la copie de Saint-Gall, en n'appliquant qu'une seule fois un algorithme de plus cours chemins. Ce chemin passera forcément par Bâle et sa copie.

---