
Corrigé 8

Problème 1

$$\begin{aligned} \text{a) } \min w &= y_1 \\ \text{s.c.} \quad 8y_1 &= 0 \\ 3y_1 &= 2 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sous forme standard, le problème primal s'écrit :

$$\begin{aligned} \min z &= -2y_3 + 2y_4 \\ \text{s.c.} \quad 8y_1 - 8y_2 + 3y_3 - 3y_4 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \max w &= 3y_1 + 6y_2 \\ \text{s.c.} \quad -3y_1 + y_2 &\leq 1 \\ y_1, y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Le problème primal du point b) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 \\ \text{s.c.} \quad x_1 &\geq -1 \\ x_1 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

et sa solution optimale est $x_1^* = 0$ et $z^* = 0$.

Pour le dual, la solution optimale est $y_1^* = y_2^* = 0$ et $w^* = 0$. Nous avons évidemment l'égalité entre z^* et w^* .

Problème 2

1) Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= -3x_1 + 2x_2 + \mu_1(x_1 - x_2 - 2) + \mu_2(-x_1 + x_2 + 3) - \mu_3x_1 - \mu_4x_2 \\ &= (-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)x_1 + (2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4)x_2 - 2\mu_1 + 3\mu_2. \end{aligned}$$

2) La fonction duale est donnée par :

$$q(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, \lambda, \mu).$$

Pour que cette fonction soit bornée, il faut que $-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0$ et $2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0$.
D'où :

$$q(\lambda, \mu) = -2\mu_1 + 3\mu_2.$$

3) Le problème dual s'écrit :

$$\begin{array}{rcll} \max w = & -2\mu_1 & + & 3\mu_2 \\ \text{s.c.} & -\mu_1 & + & \mu_2 + \mu_3 = -3 \\ & \mu_1 & - & \mu_2 + \mu_4 = 2 \\ & \mu_1 & , & \mu_2 , \mu_3 , \mu_4 \geq 0. \end{array}$$

4)5) Les domaines admissibles sont vides.

Problème 3

a) Programme linéaire primal :

$$\begin{array}{rcll} \min z = & 3x_{AC} & + & 4x_{AD} + x_{BC} + 3x_{BD} \\ \text{s.c.} & x_{AC} & + & x_{AD} \leq 100 \\ & & & x_{BC} + x_{BD} \leq 20 \\ & -x_{AC} & & -x_{BC} \leq -40 \\ & & - & x_{AD} - x_{BD} \leq -80 \\ & x_{AC} & , & x_{AD} , x_{BC} , x_{BD} \geq 0 \end{array}$$

où x_{IJ} est la quantité transportée de I vers J .

b) Son dual est

$$\begin{array}{rcll} \max w = & -100y_A & - & 20y_B + 40y_C + 80y_D \\ \text{s.c.} & -y_A & & + y_C \geq 3 \\ & -y_A & & + y_D \geq 4 \\ & & - & y_B + y_C \geq 1 \\ & & - & y_B + y_D \geq 3 \\ & y_A & , & y_B , y_C , y_D \geq 0 \end{array}$$

c) Une entreprise de transport T désire travailler avec l'entreprise E en rachetant sa production directement à la sortie des usines A et B selon des prix unitaires y_A et y_B , en acheminant cette marchandise jusqu'aux points de ventes C et D et en la revendant à l'entreprise E selon de nouveaux prix unitaires y_C et y_D respectivement. L'entreprise T cherche à fixer ses prix de manière à maximiser son bénéfice, tout en sachant que pour pouvoir entrer sur le marché, elle doit se montrer concurrentielle par rapport aux coûts de transport auxquels l'entreprise E devait préalablement faire face.