Corrigé 7

Problème 1

Posons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\min & z = & y_1 & + & y_2 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & y_1 & & & = & -1 \\
 & & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & + & y_2 & = & -2 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Après avoir introduit les variables artificielles y_1 et y_2, on cherche une solution admissible de notre problème à l'aide d'une phase 1 de l'algorithme du simplexe

$T_0 =$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		θ	
-2	-1	1	1	0	1	-	
-1	**2**	-1	0	1	2	1	$\leftarrow$
3	-1	0	0	0	-3		
	$\uparrow$						

$T_1 =$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		θ	
-5/2	0	**1/2**	1	1/2	2	4	$\leftarrow$
-1/2	1	-1/2	0	1/2	1	-	
5/2	0	-1/2	0	1/2	-2		
		$\uparrow$					

$T_2 =$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
-5	0	1	2	1	4
-3	1	0	1	1	3
0	0	0	1	1	0

La phase 1 du simplexe est terminée. On peut à partir de cette base admissible résoudre la phase II.

$T_0 =$

x_1	x_2	x_3	
-5	0	1	4
-3	1	0	3
10	0	0	-10

Ce tableau est optimal. La solution optimale du problème est $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $z = 10$.

Problème 2

a) Posons x_1 le nombre de radios de type A et x_2 le nombre de radios de type B produites chaque semaine.

Le programme linéaire maximisant le chiffre d'affaires hebdomadaire de RadioIn est donc donné par :

$$\begin{array}{llrcrcl}
\text{Max} & z = & 15x_1 & + & 10x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Forme canonique

$$\begin{array}{llrcrcr}
\text{Min} & z = & -15x_1 & - & 10x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
& & -2x_1 & - & x_2 & \leq & -10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b) Forme standard:

$$\begin{array}{llrcrcccccccccr}
\text{Min} & z = & -15x_1 & - & 10x_2 & & & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 24 \\
& & -2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & -10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

On obtient le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
T_0	1	2	1	0	0	0	24
	-2	-1	0	1	0	0	-10
	2	1	0	0	1	0	45
	1	3	0	0	0	1	30
	-15	-10	0	0	0	0	0

Ce tableau est non admissible donc la phase I est nécessaire pour déterminer une solution de base admissible.
Problème auxiliaire : (Multiplier la deuxième contrainte par -1 pour avoir $b \geq 0$ et rajouter la variable artificielle y_1)

$$\begin{array}{llrcrcccccccccccr}
\text{Min} & w = & y_1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & = & 24 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & & & + & y_1 & = & 10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & = & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & = & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & y_1 & \geq & 0
\end{array}$$

Tableau initial du problème auxiliaire :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	
T_0^{aux}	1	2	1	0	0	0	0	24
	2	1	0	-1	0	0	1	10
	2	1	0	0	1	0	0	45
	1	3	0	0	0	1	0	30
	-2	-1	0	1	0	0	0	-10

Problème 3

Après avoir introduit les variables d'écart x_4 et x_5, on obtient le tableau initial suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$T_0 =$	-1	-1	-1	1	0	-1
	1	2	5	0	1	10
	1	-2	1	0	0	0

Ce tableau n'étant pas admissible, on applique une phase I: on multiplie par -1 la 1ère contrainte pour que $b \geq 0$, on introduit les variables artificielles y_1 et y_2 et la fonction objectif $z' = y_1 + y_2$ du problème auxiliaire que l'on va chercher à minimiser

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
$T_0^{\text{aux}} =$	**1**	1	1	-1	0	1	0	1
	1	2	5	0	1	0	1	10
	-2	-3	-6	1	-1	0	0	-11

Ensuite on applique l'algorithme phase II au problème auxiliaire :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
$T_1^{\text{aux}} =$	1	**1**	1	-1	0	1	0	1
	0	1	4	1	1	-1	1	9
	0	-1	-4	-1	-1	2	0	-9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
$T_2^{\text{aux}} =$	1	1	**1**	-1	0	1	0	1
	-1	0	3	2	1	-2	1	8
	1	0	-3	-2	-1	3	0	-8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
$T_3^{\text{aux}} =$	1	1	1	-1	0	1	0	1
	-4	-3	0	**5**	1	-5	1	5
	4	3	0	-5	-1	6	0	-5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
$T_4^{\text{aux}} =$	1/5	2/5	1	0	1/5	0	1/5	2
	-4/5	-3/5	0	1	1/5	-1	1/5	1
	0	0	0	0	0	11	1	0

Ce tableau est optimal pour la fonction objectif z'. De plus, comme $z' = 0$ et les variables artificielles y_1 et y_2 sont hors base, on obtient un tableau initial admissible pour le problème initial en biffant les colonnes correspondant à y_1 et y_2, et en mettant à jour les coûts réduits.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$T_0 =$	1/5	**2/5**	1	0	1/5	2
	-4/5	-3/5	0	1	1/5	1
	4/5	-12/5	0	0	-1/5	-2

On applique l'algorithme phase II au problème :

$$T_1 = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1/2 & 1 & 5/2 & 0 & 1/2 & 5 \\ -1/2 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 10 \end{array}$$

Ce tableau est optimal et la solution du problème est $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 0$, et $z = -10$.

April 19, 2012 – mbi/fsh