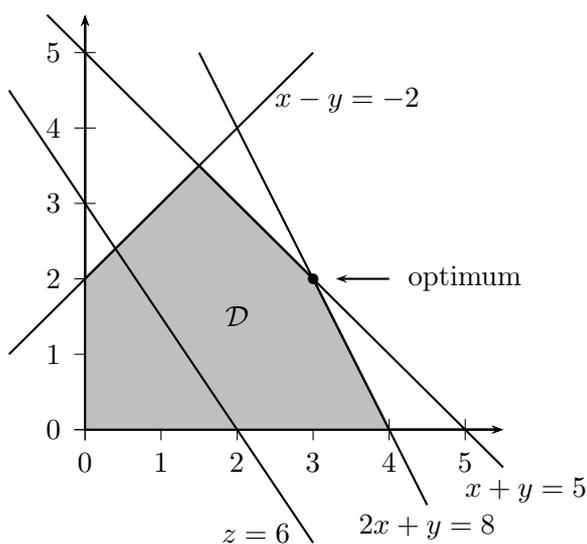


Corrigé 5

Problème 1

a) Le domaine des solutions admissibles est :



Les sommets ou points extrêmes de \mathcal{D} sont :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) On détermine la solution optimale graphiquement, en représentant les lignes de niveau de z . L'optimum est atteint en $(3, 2)$ et a une valeur égale à -13 .

c) Le programme linéaire sous forme canonique s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \min & z = -3x - 2y \\ \text{s.c.} & -x + y \leq 2 \\ & 2x + y \leq 8 \\ & x + y \leq 5 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Mettons-le sous forme standard :

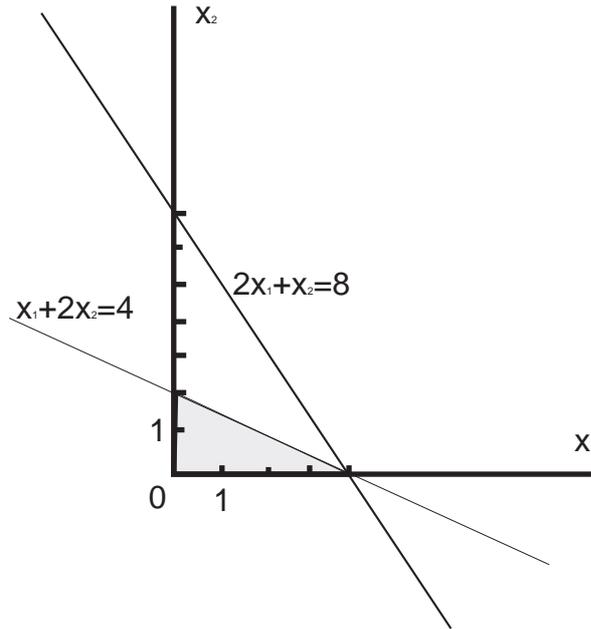
$$\begin{array}{ll} \min & z = -3x - 2y \\ \text{s.c.} & -x + y + a = 2 \\ & 2x + y + b = 8 \\ & x + y + c = 5 \\ & x, y, a, b, c \geq 0 \end{array}$$

Problème 2

a) On introduit les variables d'écart x_3 et x_4 :

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b)



c) Base (x_1, x_4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Direction correspondant à x_2 :

$$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ -\frac{x_4}{d_4} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 0$$

Direction correspondant à x_3 :

$$d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ d_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 8$$

d) Base (x_2, x_3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

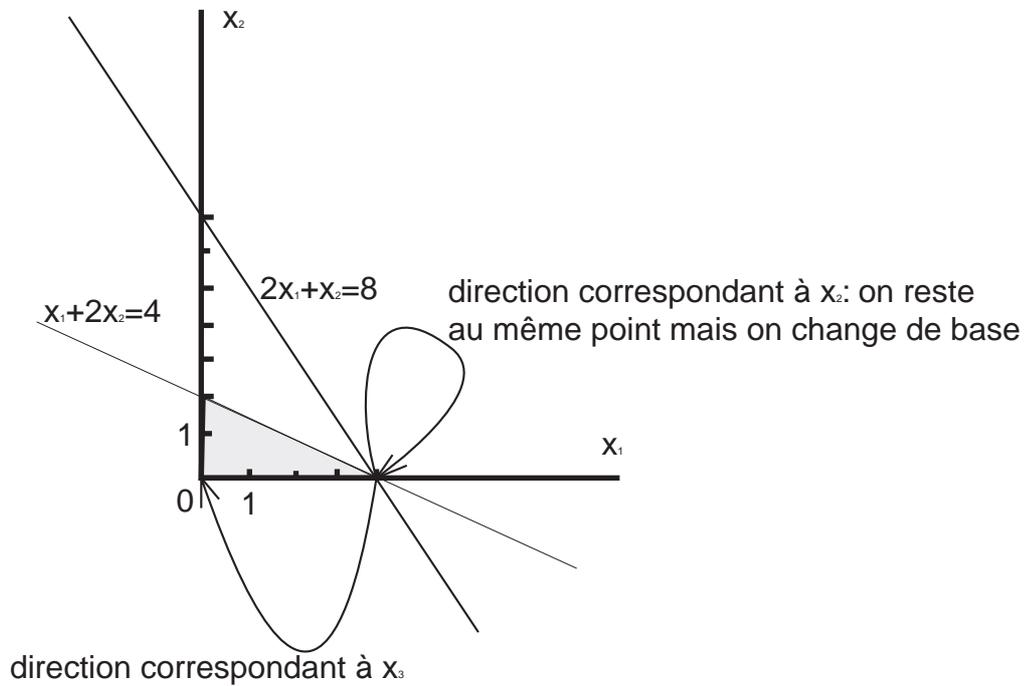
Direction correspondant à x_1 :

$$d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ -\frac{x_3}{d_3} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

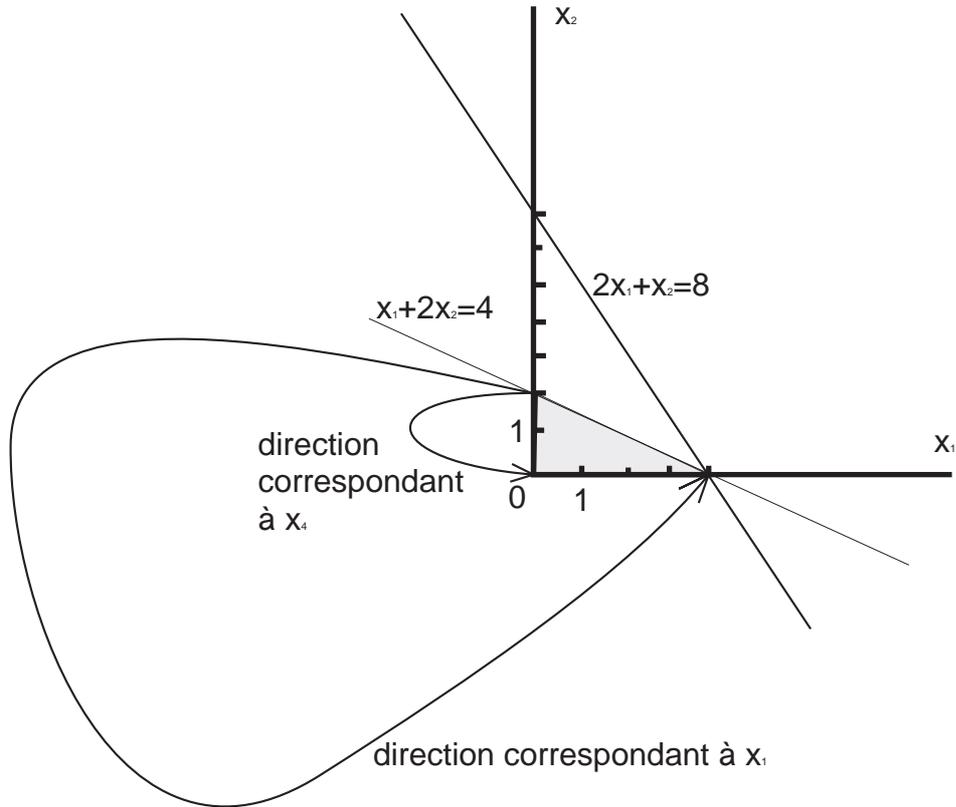
Direction correspondant à x_4 :

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ d_3 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

e)



f)



Problème 3

a) La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

et toute base de cette matrice est formée d'une des quatre premières colonnes et de la cinquième. Les quatre bases et les solutions de base associées sont donc

$$1. \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T = (2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1)^T$$

$$2. \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1)^T$$

$$3. \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T = (0 \ 0 \ 2/3 \ 0 \ -1)^T$$

$$4. \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ -1)^T$$

Toutes ces solutions de base ne sont pas admissibles pour le système.

b) Pour une matrice 2×5 , le nombre maximal de bases est $\binom{5}{2}$, c'est-à-dire 10.