EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2012

Corrigé 3

Problème 1

- Fonction f:
  Le gradient et la matrice hessienne de f sont :

$$\begin{array}{rcll} \nabla f(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{array}.$$

  Les points critiques sont les points $\boldsymbol{x}^*$ pour lesquels le gradient de f s'annule. Dans notre cas, $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^* = (0,0)$. Ce point est un minimum local strict de f puisque $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ est définie positive. Etant l'unique point stationnaire, ce point est le minimum global de la fonction f.

- Fonction g:
  Le gradient et la matrice hessienne de g sont :

$$\begin{array}{rcll} \nabla g(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ 3x_2^2 - 1 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{array}.$$

  Le gradient s'annule en 4 points (critiques) : $\boldsymbol{x} = (1, \sqrt{1/3})$, $\boldsymbol{x} = (1, -\sqrt{1/3})$, $\boldsymbol{x} = (-1, \sqrt{1/3})$ et $\boldsymbol{x} = (-1, -\sqrt{1/3})$. La matrice hessienne au point $\boldsymbol{x}^*$ est définie positive si et seulement si $\boldsymbol{x}^* > \mathbf{0}$, et donc seul le premier de ces points est un minimum local strict. (Le dernier point est un maximum local strict et les autres sont des points selle).

Problème 2

Considérons un parallélépipède P. Notons respectivement x, y et z sa longueur, sa largeur et sa hauteur. La surface de P s'écrit alors :

$$S = 2(xy + xz + yz)$$

Or, P a un volume unité donc $xyz = 1$. Ceci impose que x et y soient non nuls, ce qui permet d'éliminer z dans l'expression de S :

$$S(x,y) = 2(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})$$

Le problème revient donc à minimiser la fonction de deux variables $S(x,y)$ sur l'ensemble $x, y > 0$. Cherchons les points en lesquels $\nabla S = 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2(y - \frac{1}{x^2})$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2(x - \frac{1}{y^2})$$

$\nabla S = 0$ implique donc $x = y = 1$. Si S possède un minimum local, il ne peut donc être qu'en $x = y = 1$. A présent, nous allons déterminer si S admet un minimum local en ce point. Pour cela nous allons utiliser la condition suffisante d'optimalité du second ordre. La matrice Hessienne de S en $(1,1)$ est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique définie positive, ce qui prouve que nous avons bien un minimum local de S en $(1,1)$. S admet donc un seul minimum local en $(1,1)$. Puisque S est continue et qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque (x,y) tend vers la frontière du domaine admissible, ce minimum local est un minimum global.
Le parallélépipède de volume unité a une surface minimale lorsque :

$$x = y = z = 1$$

Problème 3

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$.
   $\nabla f^2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$.

   $(2,2)$ n'est pas un minimum car $\nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$.

   $(-1,1)$ est un minimum car $\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f^2(-1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ est définie positive.
   $(0,-1)$ est un maximum car $\nabla f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f^2(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ est définie négative.

2. $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
   $x_1 = x_0 - (\nabla^2 f(2,2))^{-1} \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{44} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{11} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.
   $x_2 = x_1 - (\nabla^2 f(x_1))^{-1} \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 1.151 \\ 1.025 \end{pmatrix}$.
   La méthode n'est pas applicable aux autres points car $\nabla f(x,y)$ est nul en ces points.

Problème 4

On calcule le gradient :

$$\nabla f(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix},$$

le Hessien :

$$H(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et son inverse :

$$H^{-1}(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On s'aperçoit que l'on a :

$$H^{-1}(\boldsymbol{x_k})\nabla f(\boldsymbol{x_k}) = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_k}.$$

Ainsi, quel que soit $\boldsymbol{x_k} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{x_k} - H^{-1}(\boldsymbol{x_k})\nabla f(\boldsymbol{x_k}) = \boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_k} = (0, 0).$$

Ainsi, en une itération et indépendamment du point de départ $\boldsymbol{x_k}$, la méthode de Newton converge vers le minimum de la fonction. On peut montrer que cette propriété est vérifiée pour toute fonction quadratique définie positive.

March 6, 2012 – mbi/fsh