Optimisation en nombres entiers

Michel Bierlaire

michel.bierlaire@epfl.ch

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

Définitions

Optimisation en nombres entiers

Un problème d'optimisation en nombres entiers est un problème d'optimisation dont toutes les variables sont contraintes à ne prendre que des valeurs entières.

- Variables discrètes : nombre d'objets à considérer, nombre d'actions à effectuer, etc.
  - Nombres de vélos à installer sur le campus.
  - Nombres d'ouvriers à affecter à un chantier.
- Variables binaires (0/1) : oui/non, allumer/éteindre, etc.
  - Utiliser la voiture ou pas.
  - Construire un pont ou pas.
  - Allumer la climatisation ou pas.

Définitions

Optimisation mixte en nombres entiers

Un problème d'optimisation mixte en nombres entiers est un problème d'optimisation dont certaines *variables sont contraintes à ne prendre que des valeurs entières.*

- Mobilité :
  - Décision binaire : acheter une seconde voiture ou non.
  - Décision continue : nombre de kilomètres à effectuer.
- Energie :
  - Décision binaire : installer une nouvelle chaudière électricité/gaz.
  - Décision continue : quantité de gaz à brûler.

Introduction

- Problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Introduction

- Problème d'optimisation linéaire binaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \{0,1\}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Introduction

Approche intuitive immédiate :

- Ignorer les contraintes d'intégralité.
- Résoudre le problème linéaire.
- Si la solution n'est pas entière, arrondir à l'entier le plus proche.

En général, cela ne fonctionne pas !

Exemple

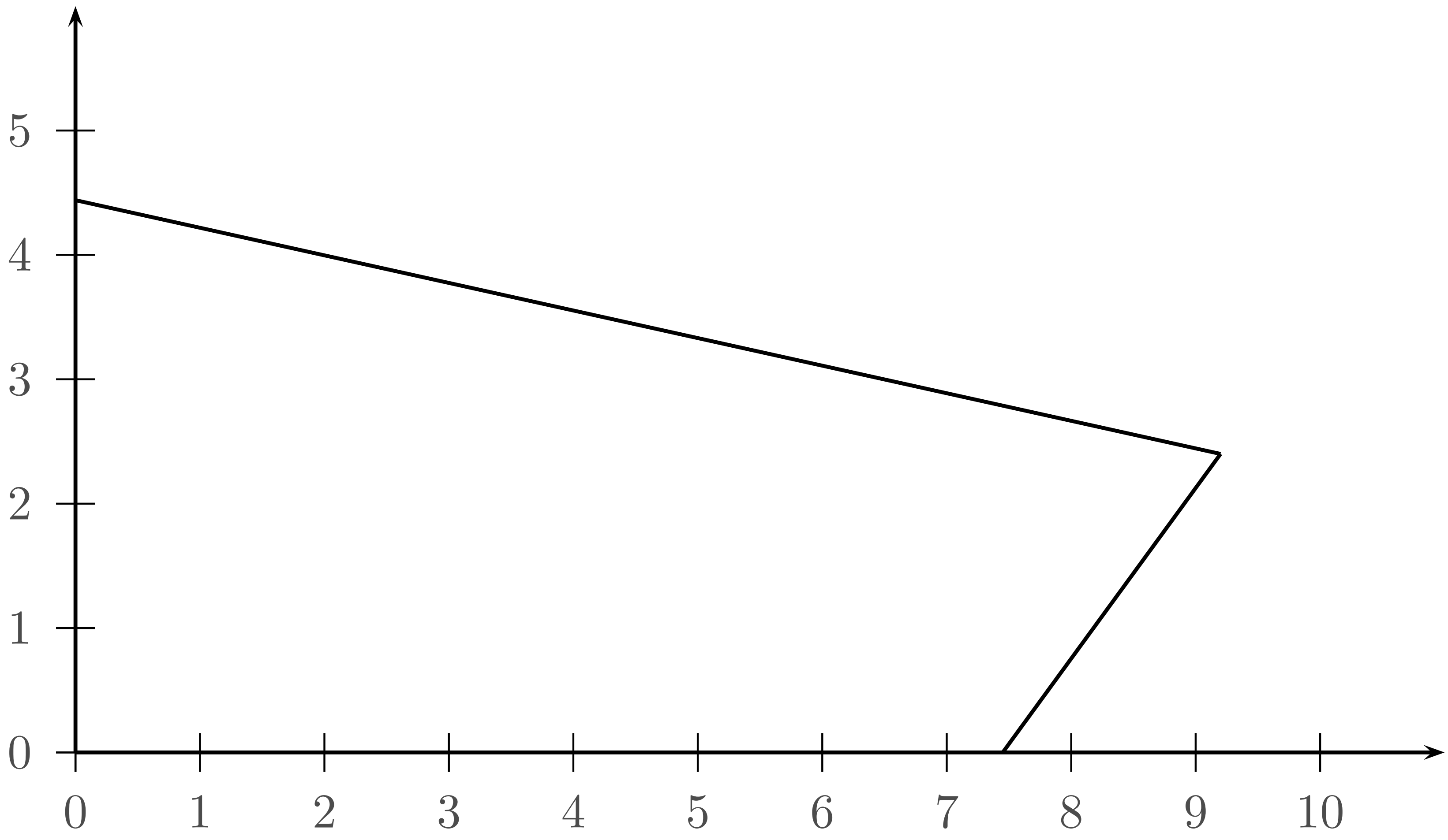
$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} -3x_1 - 13x_2$$

sous contraintes

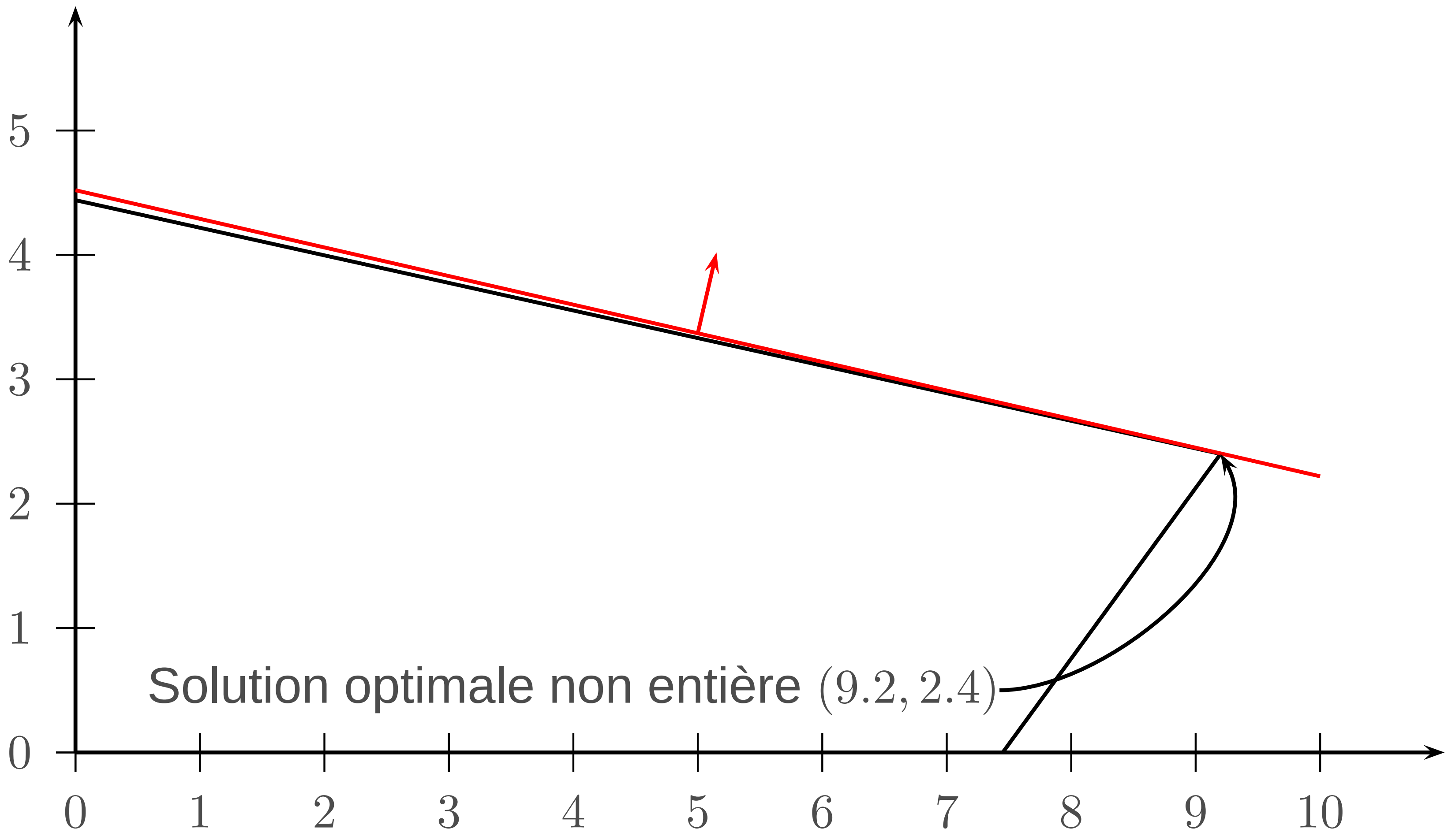
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 9x_2 & \leq & 40 \\ 11x_1 - 8x_2 & \leq & 82 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \text{entiers}$$

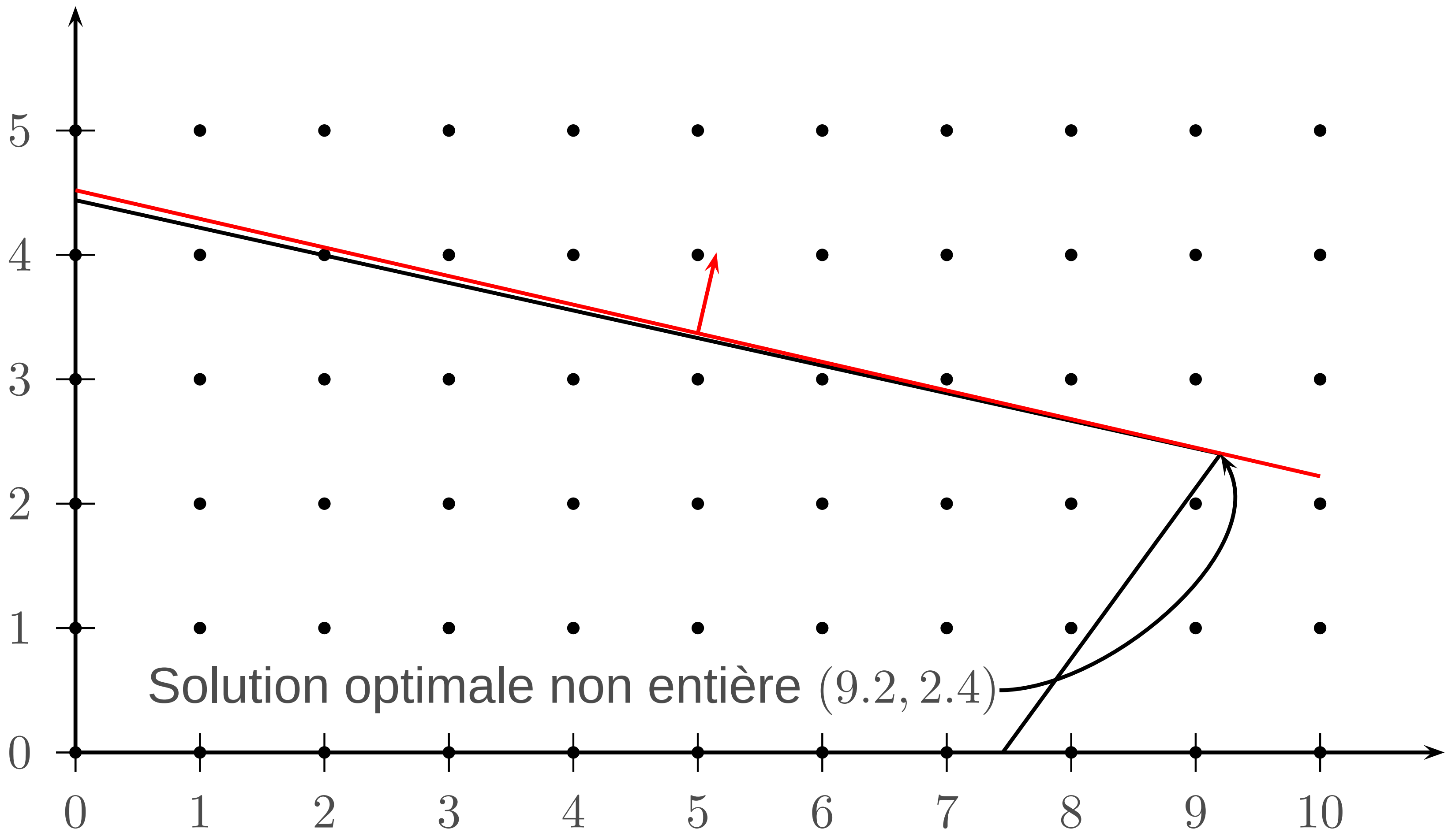
Exemple : polytope des contraintes



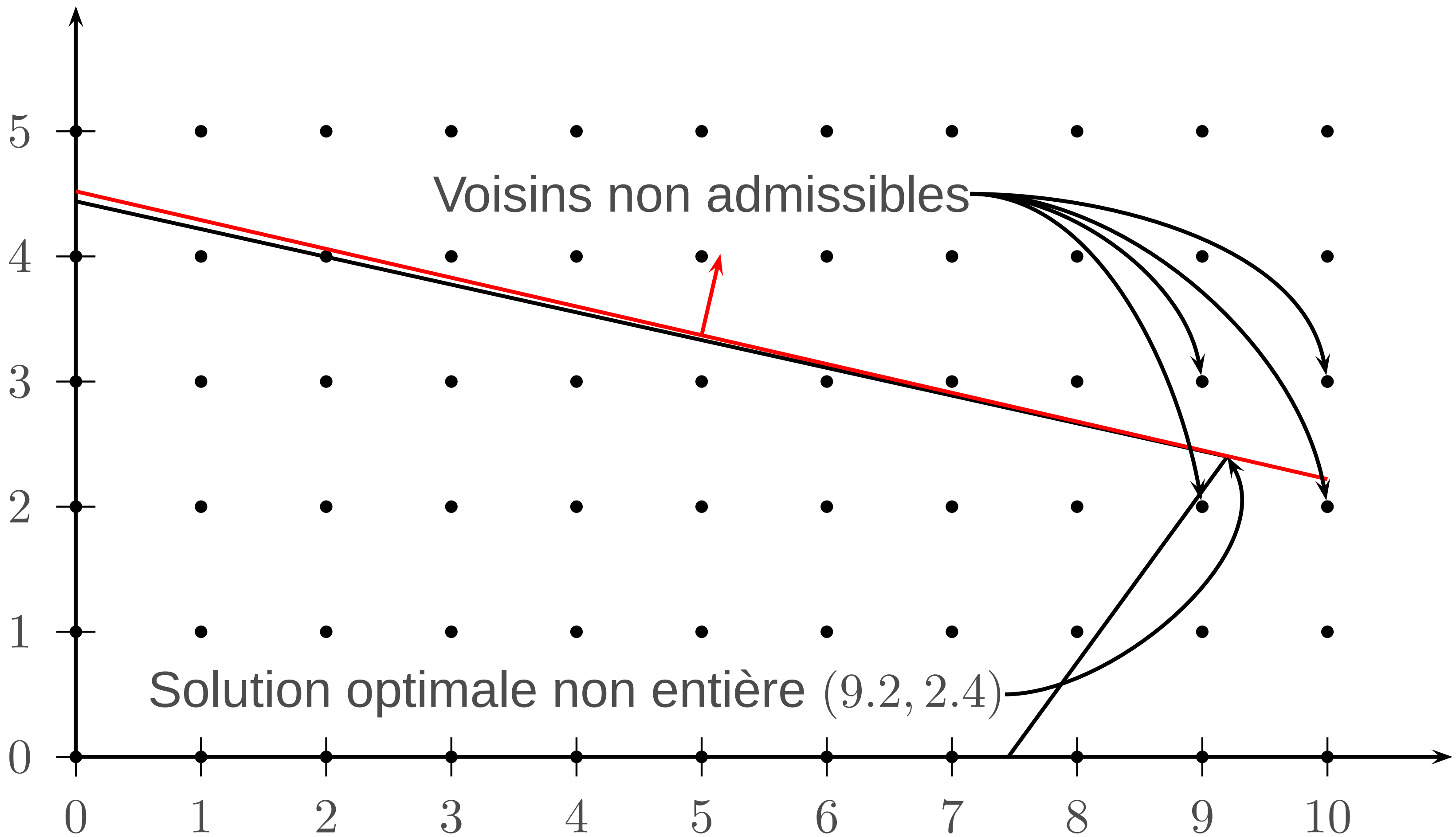
Exemple : solution du problème continu



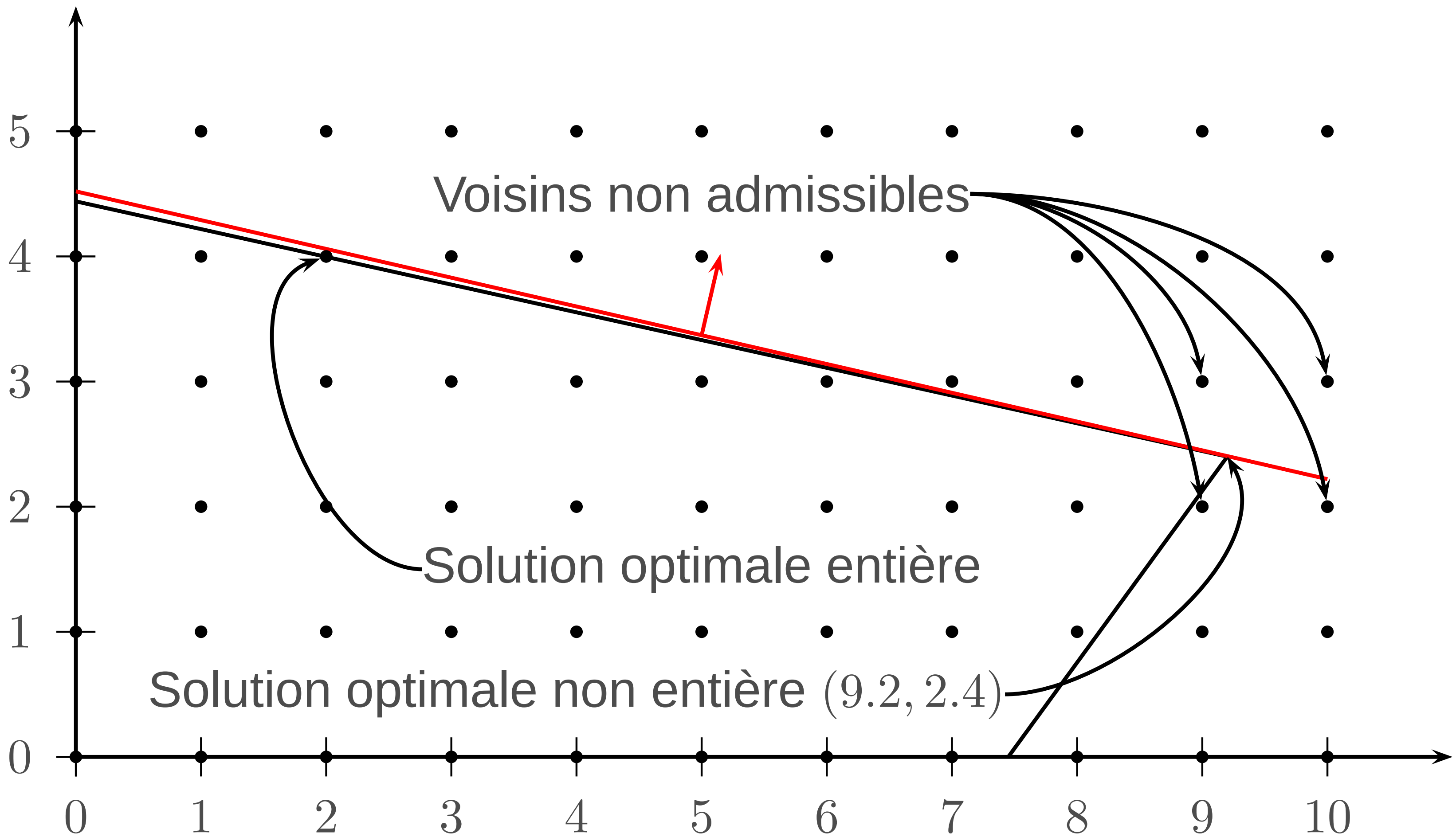
Exemple : contraintes d’intégralité



Exemple : voisins non admissibles



Exemple : solution du problème discret



Problèmes

- Il y a 2^n façons d'arrondir une solution non entière. Laquelle choisir ?
- Arrondir une solution non entière peut générer une solution non admissible.
- La solution arrondie peut se trouver très loin de la solution optimale.

Problème d’investissement

- Une société désire investir dans l’énergie hydro-électrique.
- Les ingénieurs ont identifié 4 sites potentiels pour la construction de barrages.
- Pour chaque site, ils ont évalué les coûts d’investissement, et le bénéfice attendu sur le long terme.
- La société a une capacité d’investissement de 1400 kCHF.
- Quels barrages doit-elle construire ?

Barrage	Coût	Bénéfice	Rendement
1	500	1600	3.20
2	700	2200	3.14
3	400	1200	3.00
4	300	800	2.67

Problème d'investissement

Modélisation :

- Variables de décision: x_1, x_2, x_3, x_4.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le barrage } i \text{ est choisi,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Fonction objectif : maximiser le bénéfice

$$\max 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

- Contrainte : capacité d'investissement

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

Problème d'investissement

Problème linéaire continu :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^4} 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

sous contraintes

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Solution optimale :

$$x_1 = 2.8, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0.$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Problème d'investissement

Solution optimale :

$$x_1 = 2.8, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0.$$

- Décision : ne construire que le barrage 1.
- Coût : 500 kCHF
- Somme non investie : 900 kCHF
- Bénéfice : 1600 kCHF

Problème d'investissement

Problème linéaire continu 2 :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^4} 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

sous contraintes

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1.$$

Solution optimale :

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.$$

Problème d'investissement

Solution optimale :

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.$$

- Décision : construire les barrages 1 et 2.
- Barrage 3 : plus assez d'argent pour le construire.
- Coût : 1200 kCHF
- Somme non investie : 200 kCHF
- Bénéfice : 3800 kCHF

Problème d'investissement

Problème linéaire discret :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^4} 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

sous contraintes

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Solution optimale :

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1.$$

Problème d'investissement

Solution optimale :

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1.$$

- Décision : construire les barrages 2, 3 et 4.
- Coût : 1400 kCHF
- Somme non investie : 0 kCHF
- Bénéfice : 4200 kCHF
- Le barrage correspondant au plus haut rendement n'est pas sélectionné.

Conclusion : l'approche "intuitive" ne fonctionne pas.

Conditions d'optimalité

- Il n'est pas possible de caractériser la solution optimale d'un problème d'optimisation en nombres entiers.
- Autrement dit, il n'y a pas de conditions d'optimalité pour l'optimisation discrète.
- Cela complique considérablement la résolution du problème.
- Il y a essentiellement deux manières d'aborder le problème.

Algorithmes

1. Méthodes exactes :
   - la solution optimale est fournie,
   - mais le temps nécessaire pour la trouver est une fonction exponentielle de la taille du problème.
2. Méthodes heuristiques :
   - une “bonne” solution est fournie,
   - aucune garantie d’optimalité,
   - aucune mesure de qualité de la solution,
   - performances évaluées empiriquement sur des problèmes connus.

Branch & bound

Idées :

- Parcours systématique de l'ensemble admissible.
- Diviser pour conquérir.
- Utilisation de bornes sur le coût optimal pour éliminer des régions admissibles sans les explorer.

Branch

Soit le problème d'optimisation P

$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$x \in F$$

- F est l'ensemble des solutions admissibles.
- Soit une partition de F

$$F = F_1 \cup \ldots \cup F_K.$$

- Soit x_k^* la solution optimale du problème P_k

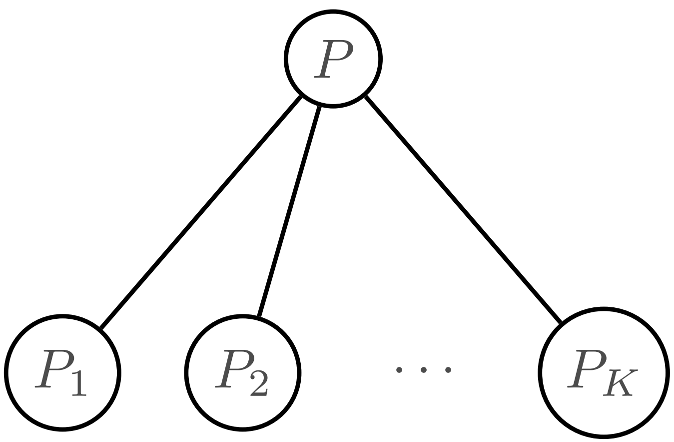
$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$x \in F_k$$

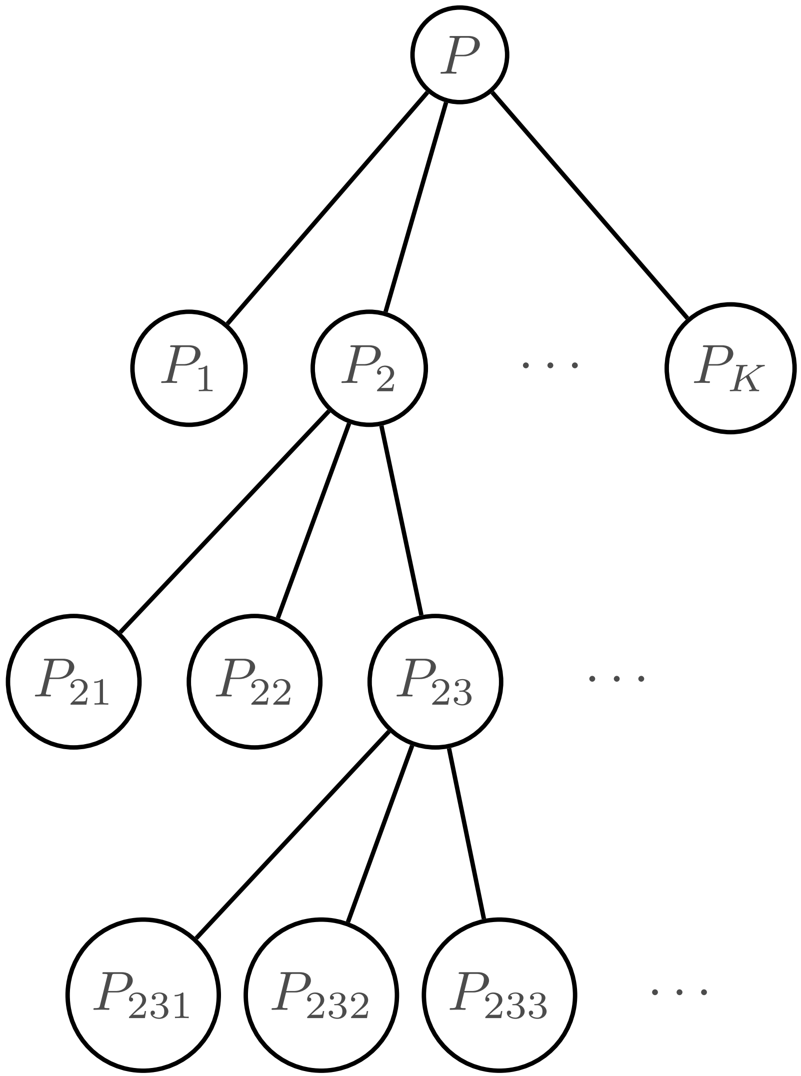
Branch

- Pour tout k, x_k^* est admissible pour le problème P.
- Soit i tel que
$$f(x_i^*) \leq f(x_k^*), \ \forall k = 1, \ldots, K.$$
- Alors, x_i^* est la solution optimale du problème P.
- Motivation : chaque sous-problème est plus simple que le problème initial.



Branch

Et chaque problème peut à nouveau être partitionné.



Branch

- Le nombre de sous-problèmes devient vite très grand.
- Il faut éviter de passer toutes les combinaisons possibles en revue.
- Idée : utiliser des bornes.

Bound

Soit le sous-problème P_k

$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$x \in F_k$$

- On suppose que l'on peut calculer facilement une borne inférieure b_k
$$b_k \leq f(x), \ \forall x \in F_k.$$
- Soit $y \in F$ une solution admissible du problème P.
- Si
$$f(y) \leq b_k \leq f(x), \ \forall x \in F_k,$$
alors cela ne vaut pas la peine de résoudre le problème P_k.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme de branch & bound

A chaque instant on maintient

- une liste de sous-problèmes actifs $\{P_1, P_2, \ldots\}$,
- la valeur $U = f(y)$ de la meilleure solution admissible obtenue jusque là.
- Initialisation :
  - soit $U = +\infty$,
  - soit $U = f(x)$ avec x admissible connu.

Algorithme de branch & bound

Itération:

- Soit P_k un sous-problème actif.
- Si P_k est non admissible, le supprimer de la liste.
- Sinon, calculer la borne b_k.
- Si $U \leq b_k$, supprimer P_k de la liste.
- Sinon,
  - soit résoudre P_k directement,
  - soit partitionner F_k et créer de nouveaux sous-problèmes, qui sont ajoutés à la liste.

Exemple : problème d'affectation

- Sur un chantier, il faut affecter 4 ouvriers à 4 tâches.
- L'ouvrier i effectue la tâche j en c_{ij} heures :

Ouvrier	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
A	9	2	7	8
B	6	4	3	7
C	5	8	1	8
D	7	6	9	4

- Comment répartir les tâches pour que le nombre total d'heures soit le plus petit possible ?

Exemple : problème d'affectation

Modélisation :

- Variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'ouvrier } i \text{ effectue la tâche } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Fonction objectif :

$$\min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple : problème d'affectation

- Contraintes:
  1. Chaque ouvrier doit effectuer exactement une tâche :

$$\sum_j x_{ij} = 1 \; \forall i.$$

  2. Chaque tâche doit être effectuée par exactement un ouvrier :

$$\sum_i x_{ij} = 1 \; \forall j.$$

Exemple : problème d’affectation

Ouvrier	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
A	9	2	7	8
B	6	4	3	7
C	5	8	1	8
D	7	6	9	4

Calcul de la borne :

- La tâche la plus rapide pour A prend 2 heures.
- La tâche la plus rapide pour B prend 3 heures.
- La tâche la plus rapide pour C prend 1 heure.
- La tâche la plus rapide pour D prend 4 heures.

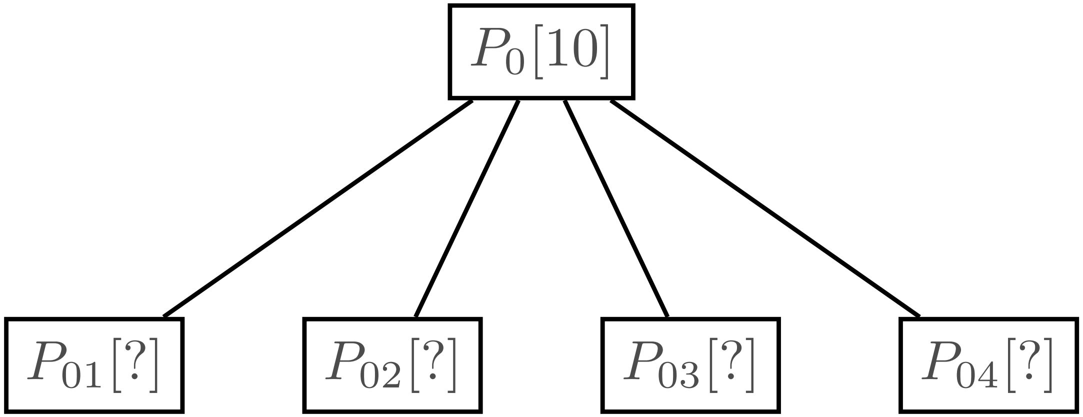
Impossible de faire mieux que 10 heures.

Exemple : problème d'affectation

- Problèmes actifs : $\{P_0\}$
- $U = +\infty$
- $b_0 = 10 < U$: on partitionne P_0.
  - P_{01} : on décide que A effectue la tâche 1,
  - P_{02} : on décide que A effectue la tâche 2,
  - P_{03} : on décide que A effectue la tâche 3,
  - P_{04} : on décide que A effectue la tâche 4.
- Chacun de ces problèmes revient à affecter 3 ouvriers à 3 tâches.
- Ils sont chacun plus simples que P_0.
- Notation : $P_k[b_k]$

Exemple : problème d'affectation

$U = +\infty$



Exemple : problème d'affectation

Calcul des bornes.

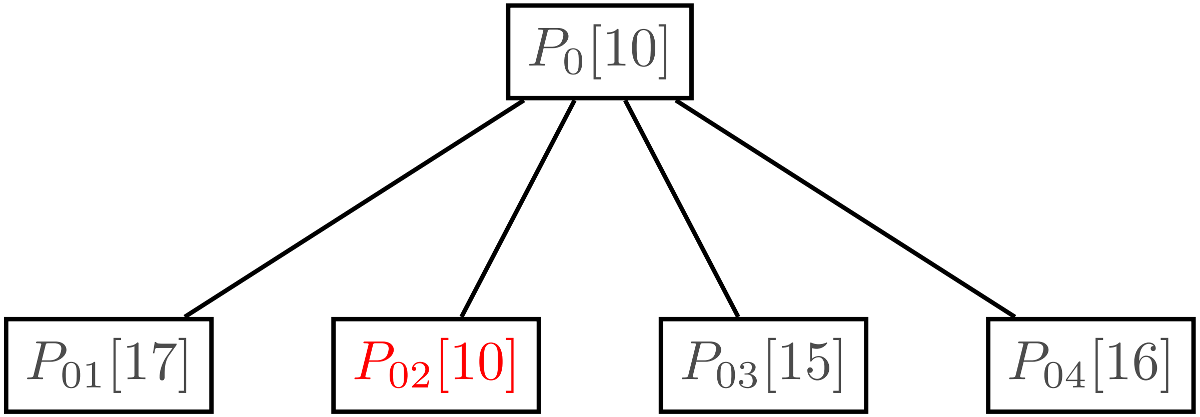
Ouvrier	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
A	9	2	7	8
B	6	4	3	7
C	5	8	1	8
D	7	6	9	4

- La tâche la plus rapide pour B prend 3 heures.
- La tâche la plus rapide pour C prend 1 heure.
- La tâche la plus rapide pour D prend 4 heures.

$$\begin{aligned} b_{01} &= 9+8 &&= 17 \\ b_{02} &= 2+8 &&= 10 \\ b_{03} &= 7+8 &&= 15 \\ b_{04} &= 8+8 &&= 16 \end{aligned}$$

Exemple : problème d'affectation

$U = +\infty$

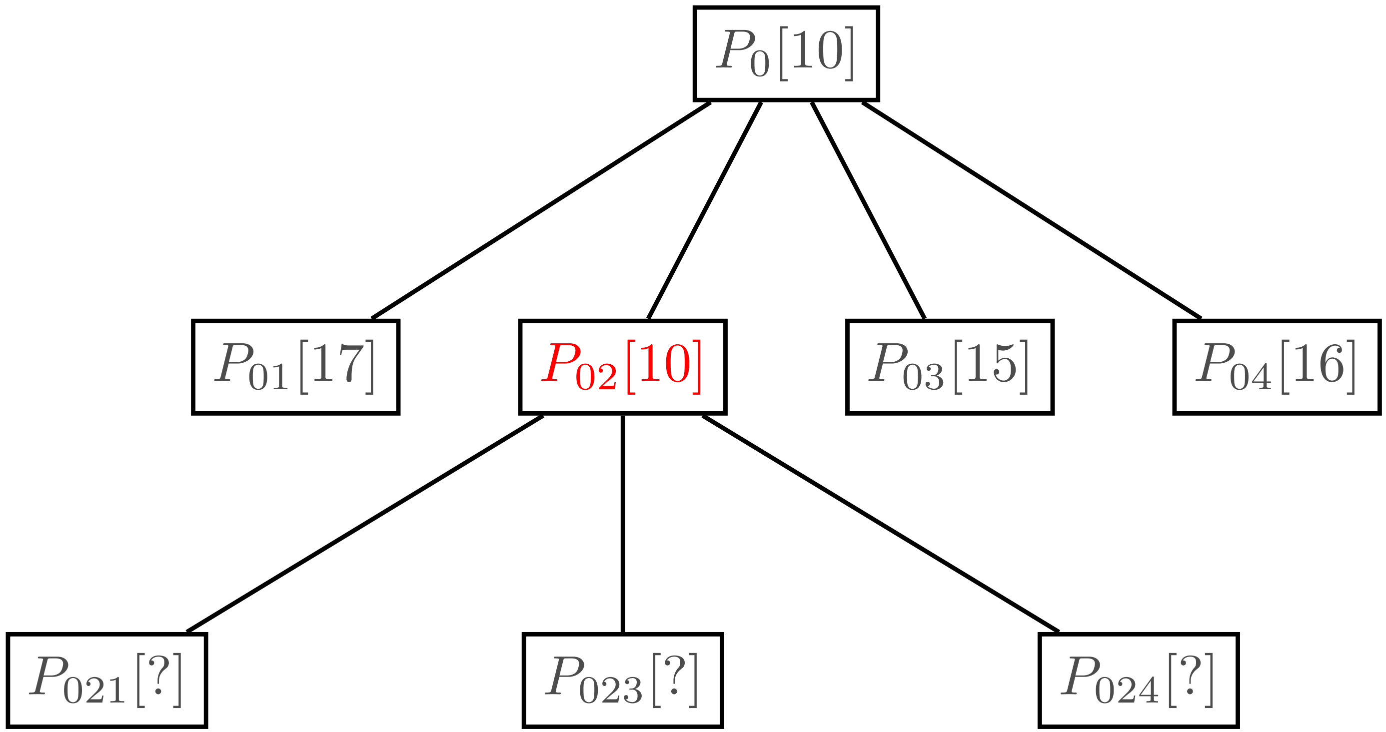


Exemple : problème d'affectation

- Problèmes actifs : $\{P_0, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}\}$
- $U = +\infty$
- P_{02} est le plus prometteur car associé à la meilleure borne.
- On partitionne P_{02}
  - P_{021} : on décide que B effectue la tâche 1,
  - P_{022} : on décide que B effectue la tâche 2,
  - P_{023} : on décide que B effectue la tâche 3,
  - P_{024} : on décide que B effectue la tâche 4.
- P_{022} est non admissible.
- Chacun des autres problèmes revient à affecter 2 ouvriers à 2 tâches.

Exemple : problème d'affectation

$U = +\infty$



Exemple : problème d'affectation

Calcul des bornes.

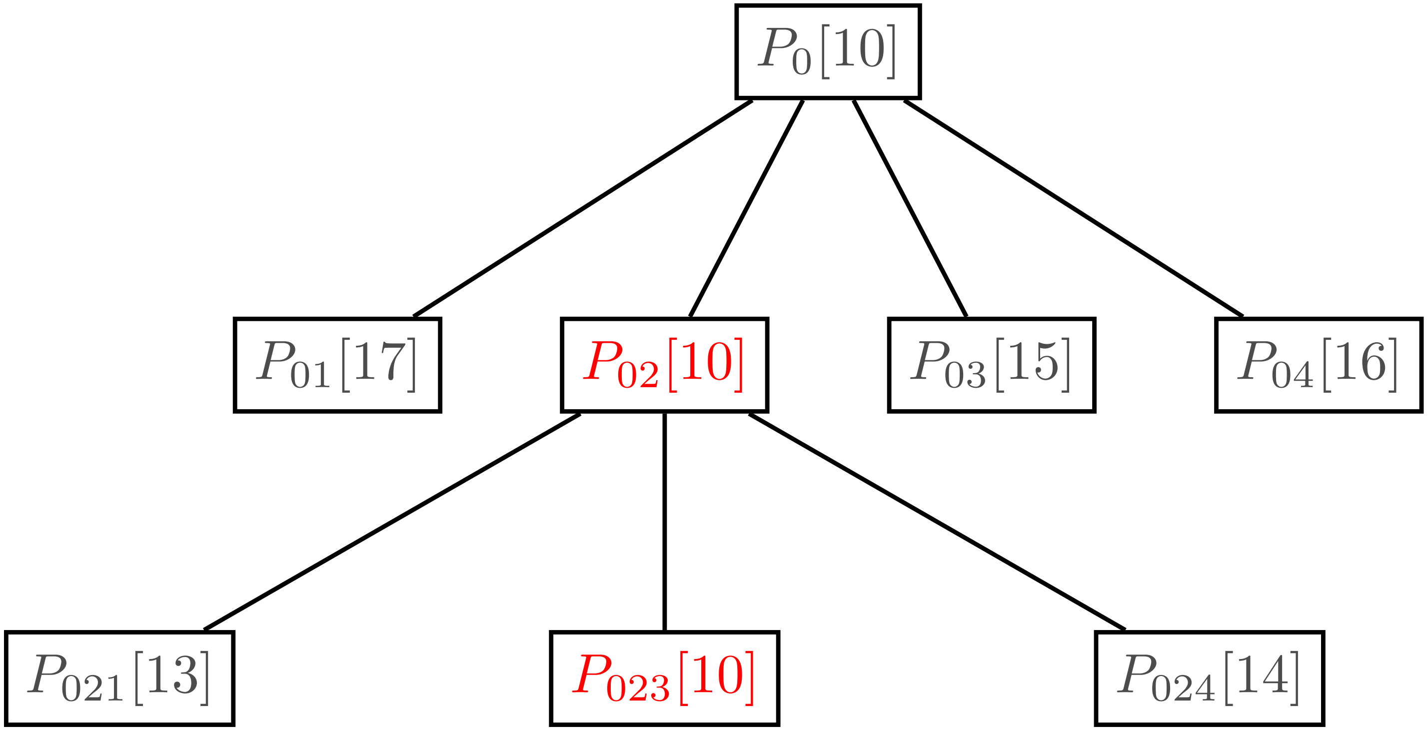
Ouvrier	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
A	9	$\boxed{2}$	7	8
B	6	4	3	7
C	5	8	1	8
D	7	6	9	4

- La tâche la plus rapide pour C prend 1 heure.
- La tâche la plus rapide pour D prend 4 heures.

$$\begin{aligned} b_{021} &= 2+6+5 &= 13 \\ b_{023} &= 2+3+5 &= 10 \\ b_{024} &= 2+7+5 &= 14 \end{aligned}$$

Exemple : problème d'affectation

$U = +\infty$



Exemple : problème d'affectation

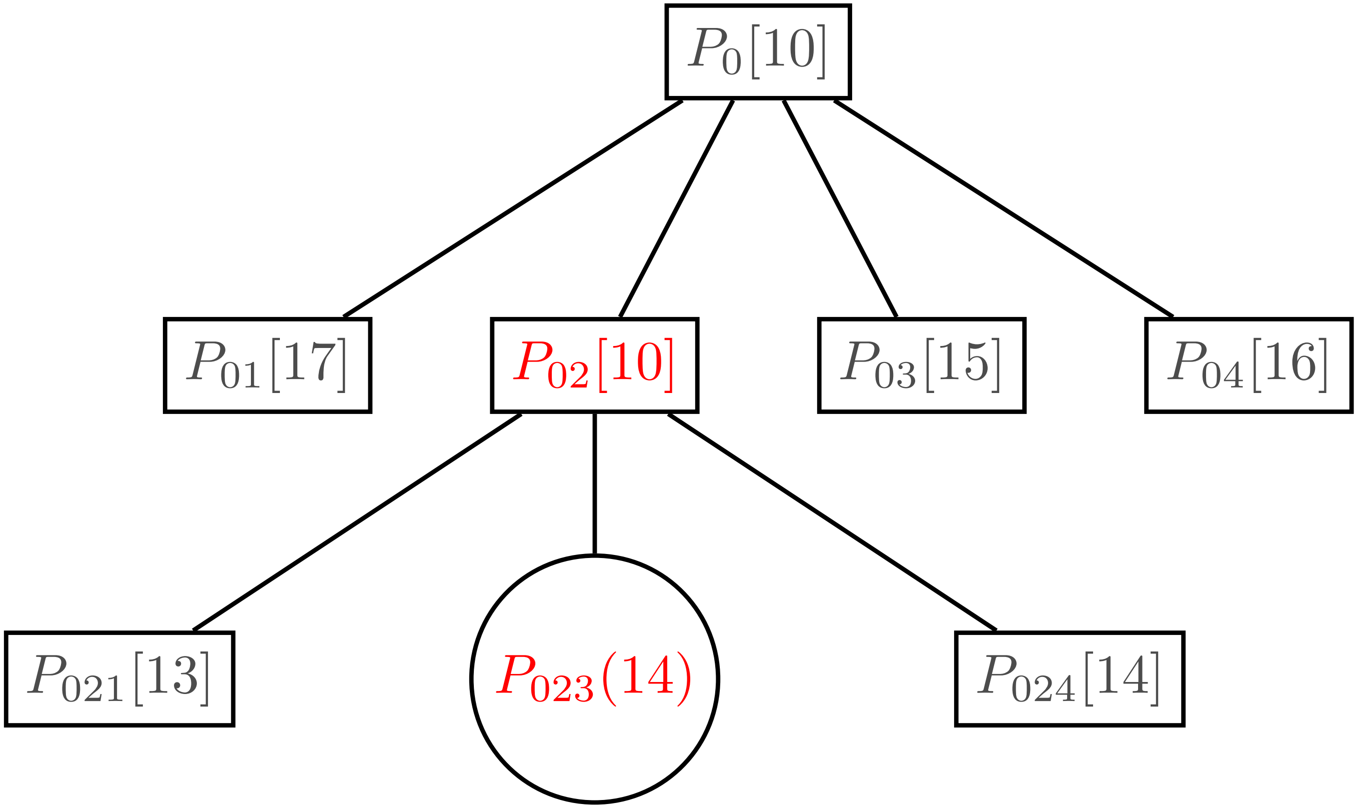
- Problèmes actifs : $\{P_0, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}, P_{021}, P_{023}, P_{024}\}$
- $U = +\infty$
- P_{023} est le plus prometteur car associé à la meilleure borne.
  - P_{0231} : on décide que C effectue la tâche 1,
  - P_{0232} : on décide que C effectue la tâche 2,
  - P_{0233} : on décide que C effectue la tâche 3,
  - P_{0234} : on décide que C effectue la tâche 4.
- P_{0232} et P_{0233} sont non admissible.
- Chacun des autres problèmes est trivial à résoudre.
- P_{0231} : A(2), B(3), C(1), D(4).
- Temps total : 2 + 3 + 5 + 4 = 14.
- P_{0234} : A(2), B(3), C(4), D(1).
- Temps total : 2 + 3 + 8 + 7 = 20.

Exemple : problème d'affectation

- Solution optimale de P_{023} trouvée. Valeur : 14
- Problèmes actifs : $\{P_0, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}, P_{021}, P_{024}\}$
- $U = 14$
- Notation : $P_k(f(x_k^*))$

Exemple : problème d'affectation

$U = 14$



TRANSP-OR

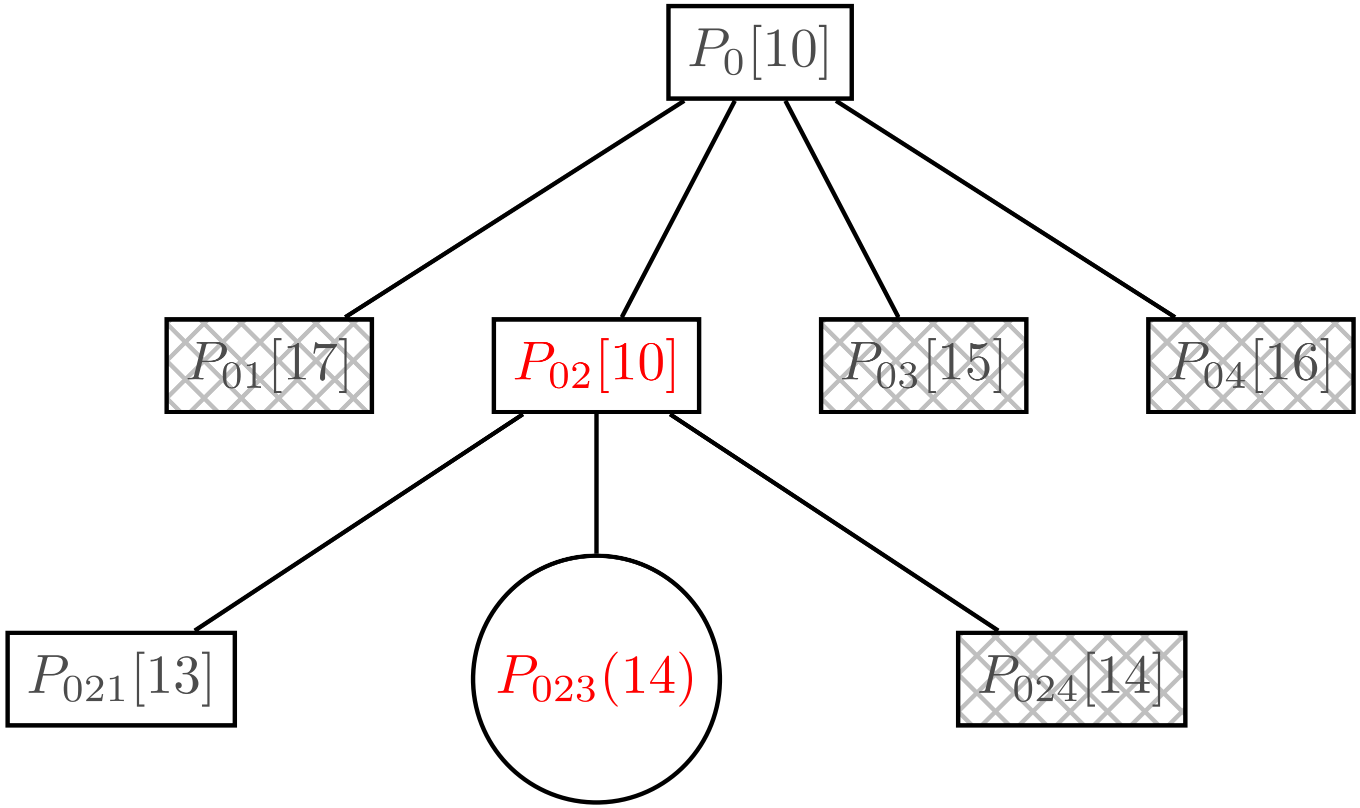
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple : problème d'affectation

- On peut maintenant supprimer les sous-problèmes dont la borne est plus grande ou égale à U.

Exemple : problème d'affectation

$U = 14$

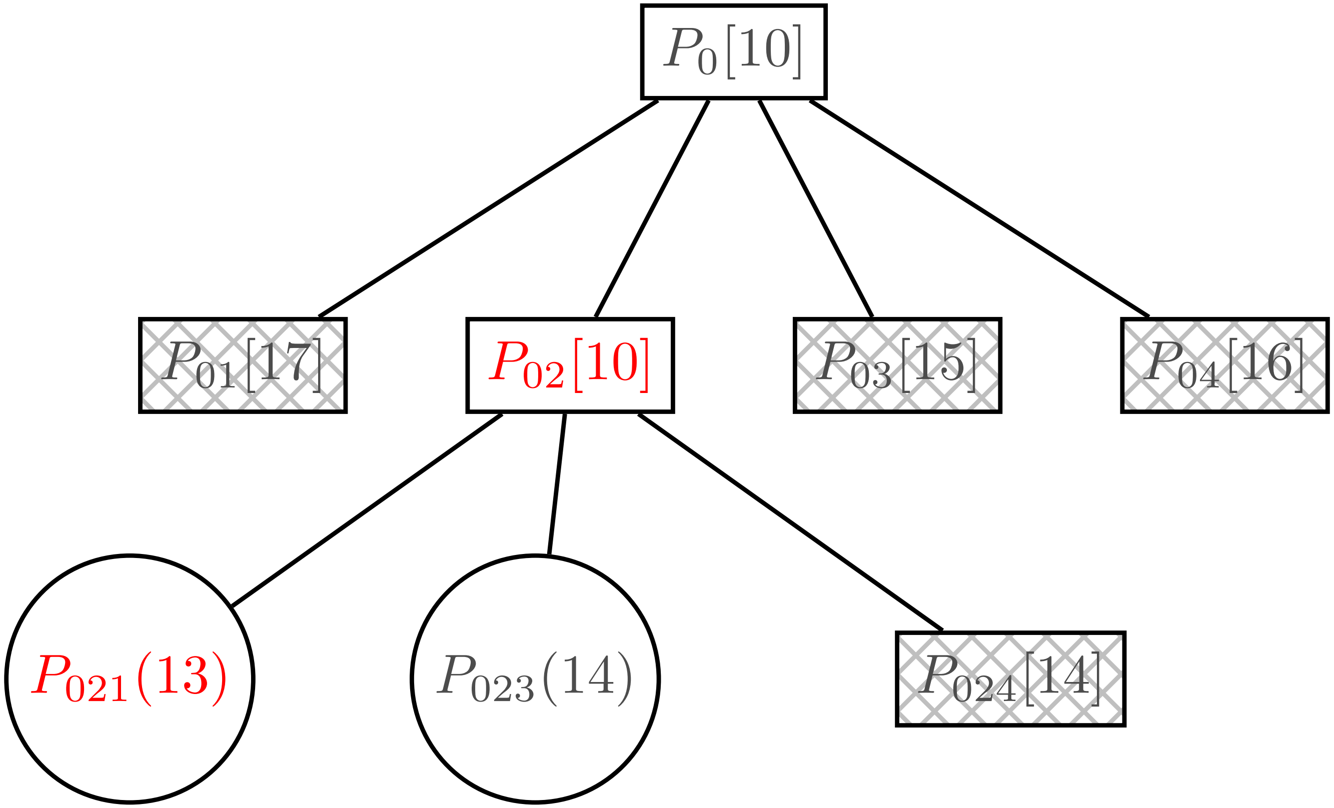


Exemple : problème d'affectation

- Problèmes actifs : $\{P_0, P_{02}, P_{021}\}$
- $U = 14$
- On partitionne P_{021}
  - P_{0211} : on décide que C effectue la tâche 1,
  - P_{0212} : on décide que C effectue la tâche 2,
  - P_{0213} : on décide que C effectue la tâche 3,
  - P_{0214} : on décide que C effectue la tâche 4.
- P_{0211} et P_{0212} sont non admissibles.
- Chacun des autres problèmes est trivial à résoudre.
- P_{0213} : A(2), B(1), C(3), D(4).
- Temps total : 2 + 6 + 1 + 4 = 13.
- P_{0214} : A(2), B(1), C(4), D(3).
- Temps total : 2 + 6 + 8 + 9 = 25.

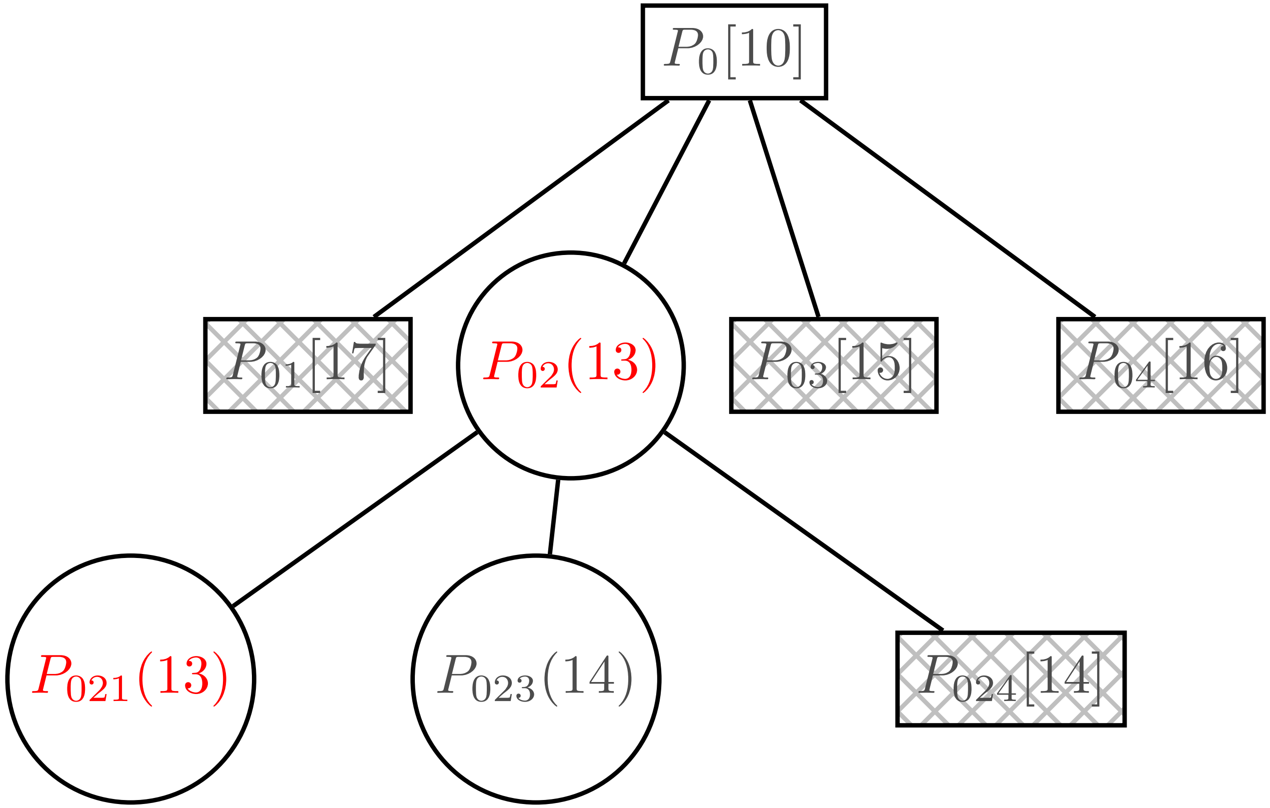
Exemple : problème d'affectation

$U = 13$



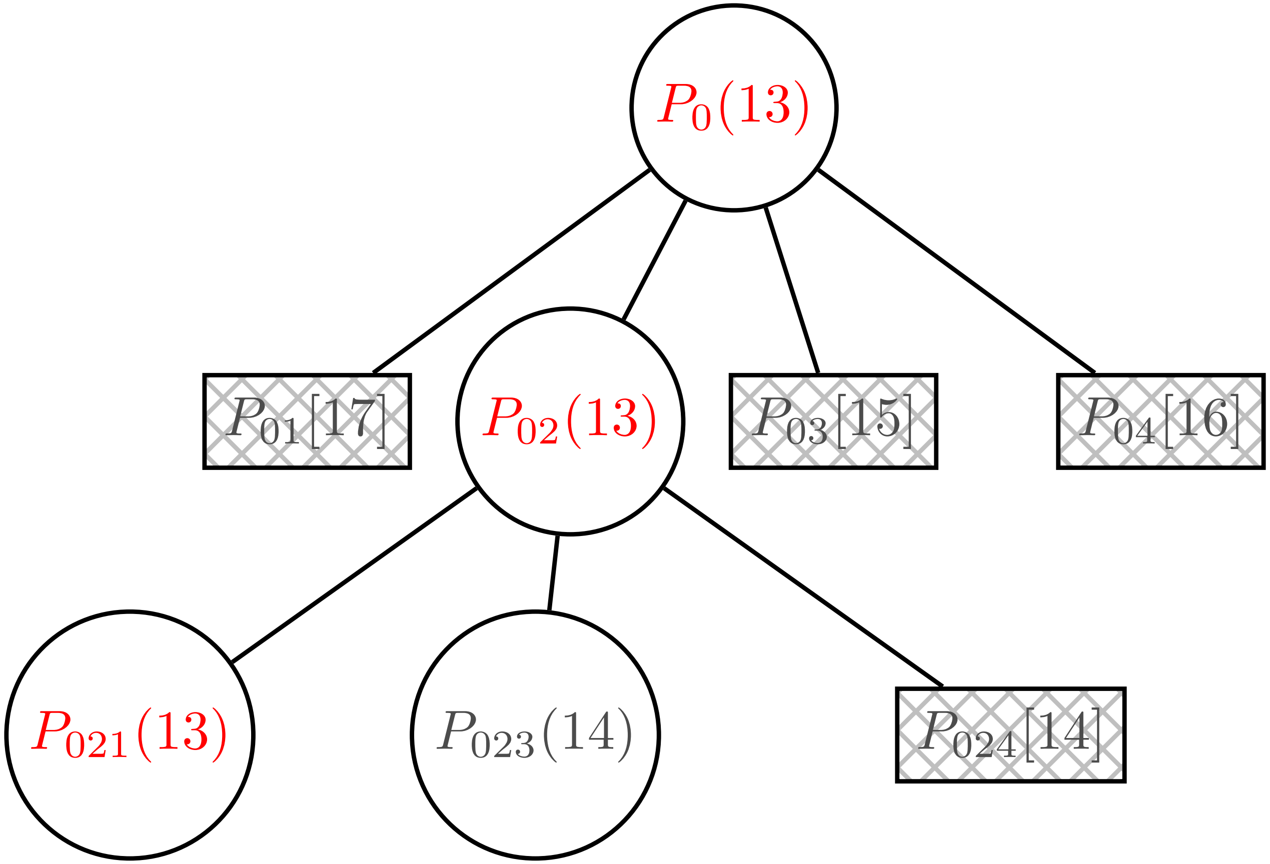
Exemple : problème d'affectation

$U = 13$



Exemple : problème d'affectation

$U = 13$



Branch & Bound

Classe d’algorithmes avec

- différentes méthodes pour partitionner,
- différentes méthodes pour choisir le sous-problème à traiter,
- différentes méthodes pour calculer les bornes.

Relaxation

Soit le problème d'optimisation P

$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \leq & 0 \\ h(x) & = & 0 \\ x & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

Le problème relaxé $R(P)$ est obtenu en ignorant les contraintes d'intégralité

$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \leq & 0 \\ h(x) & = & 0 \end{array}$$

Branch

- Soit x_R^* la solution optimale de $R(P)$.
- Si toutes les composantes sont entières, alors x_R^* est aussi solution optimale de P.
- Sinon, il existe au moins une composante i non entière $(x_R^*)_i$.
- Le problème P est alors partitionné :

P_ℓ	P_r
$\min f(x)$	$\min f(x)$
sous contraintes	sous contraintes
$g(x) \leq 0$	$g(x) \leq 0$
$h(x) = 0$	$h(x) = 0$
$x \in \mathbb{Z}$	$x \in \mathbb{Z}$
$x_i \leq \lfloor (x_R^*)_i \rfloor$	$x_i \geq \lceil (x_R^*)_i \rceil$

Branch

- Toute solution admissible de P est solution admissible soit de P_ℓ, soit de P_r. Il s'agit donc bien d'une partition de l'ensemble admissible.
- La solution x_R^* n'est pas admissible pour les relaxations des nouveaux sous-problèmes $R(P_\ell)$ et $R(P_r)$.
- En effet, comme $(x_R^*)_i$ est non entier, les contraintes

$$x_i \leq \lfloor (x_R^*)_i \rfloor \text{ et } x_i \geq \lceil (x_R^*)_i \rceil$$

  sont violées par $(x_R^*)_i$.
- La solution optimale des problèmes relaxés sera donc différente de x_R^*.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Bound

- Soit x^* la solution optimale de P.
- Soit x_R^* la solution optimale de $R(P)$.
- On a toujours
$$f(x_R^*) \leq f(x^*).$$
- On obtient donc une borne inférieure en résolvant le problème relaxé.
- Attention : cela ne fonctionne que si on peut trouver l'optimum global de $R(P)$.
- C'est le cas en particulier si le problème d'optimisation est linéaire.

Exemple

Soit le problème P_0

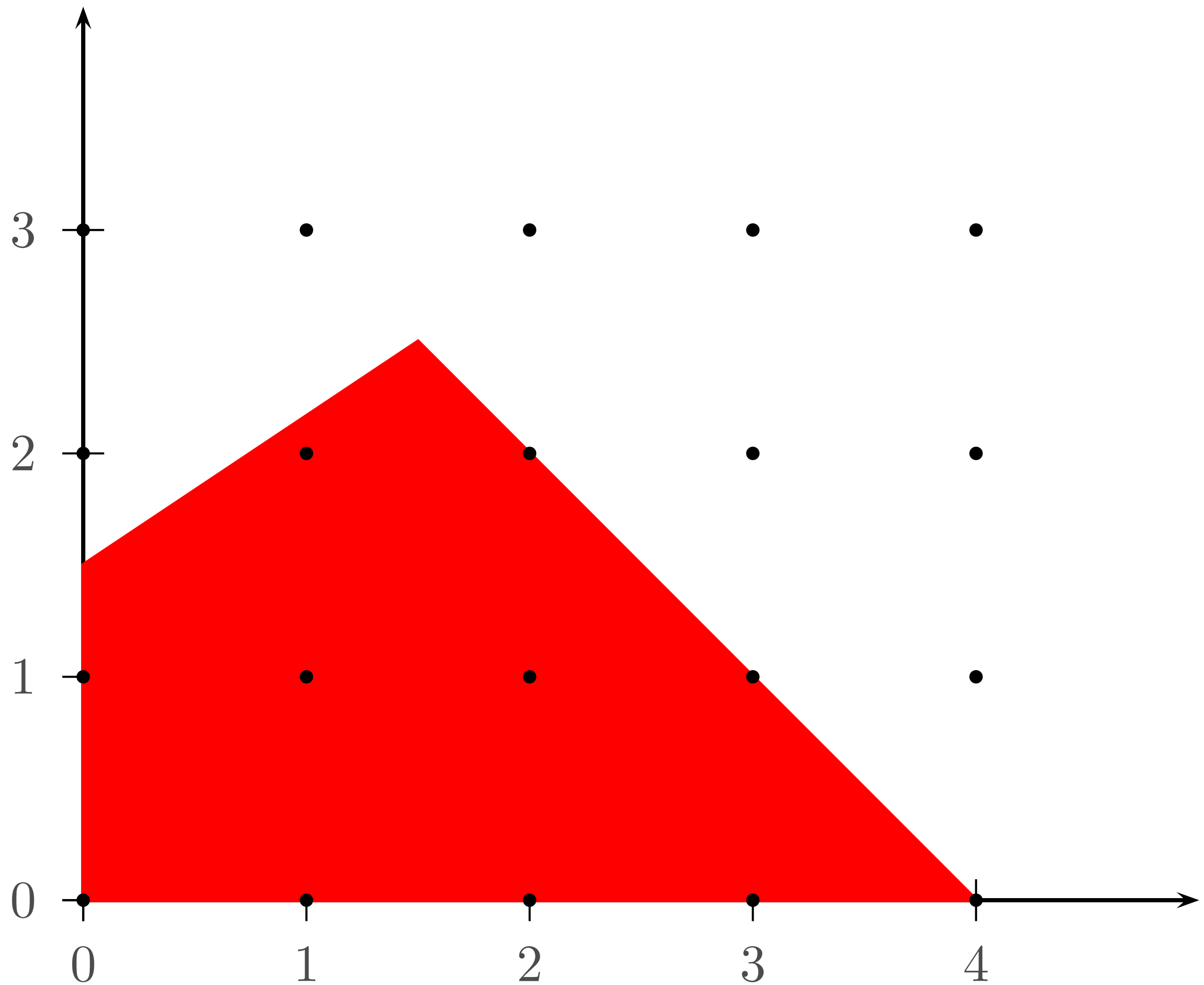
$$\min x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}. \end{array}$$

Note : $(0,0)$ est admissible. Donc $U = 0$.

Exemple



Exemple

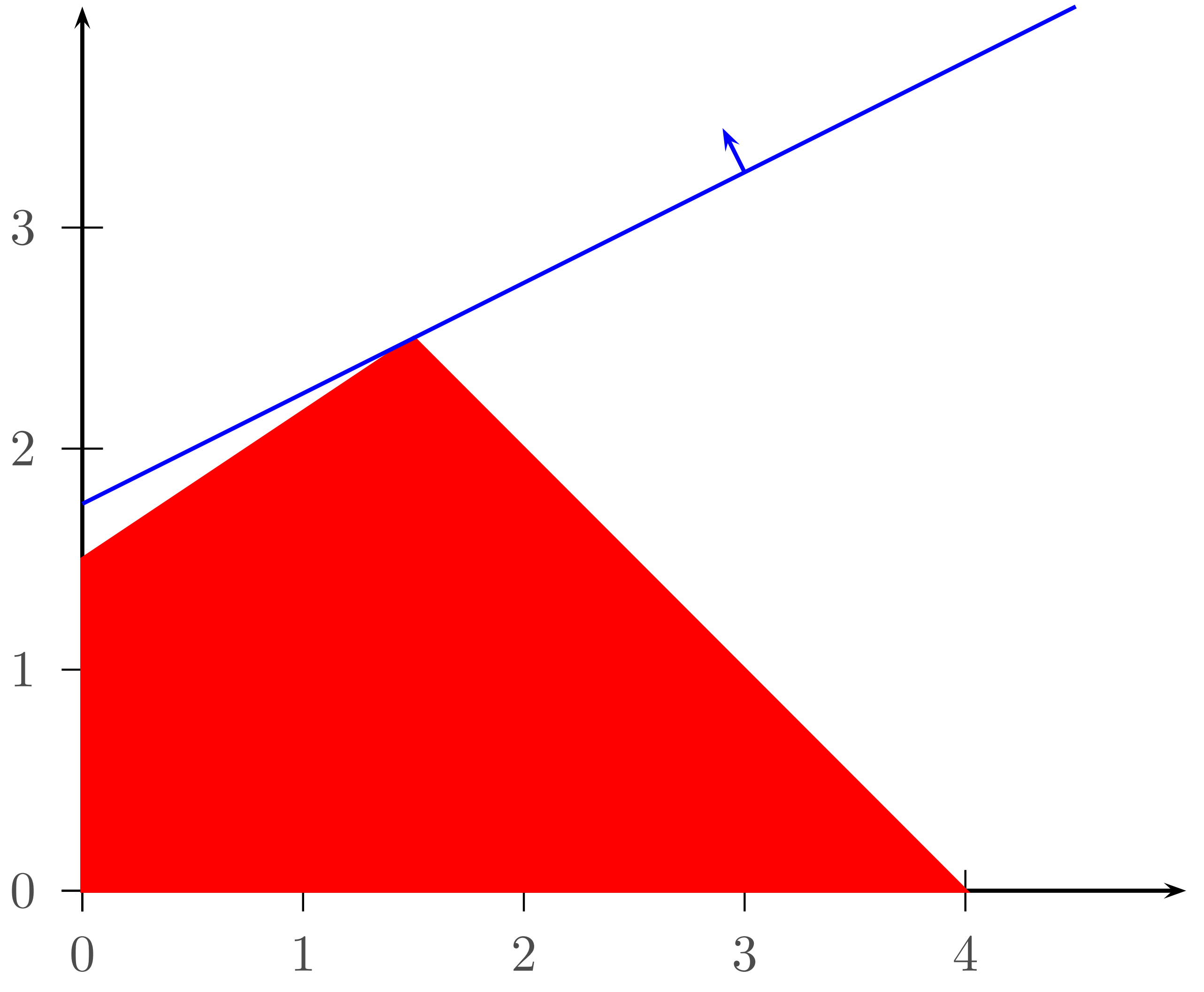
Problème relaxé $R(P_0)$.

$$\min x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Exemple

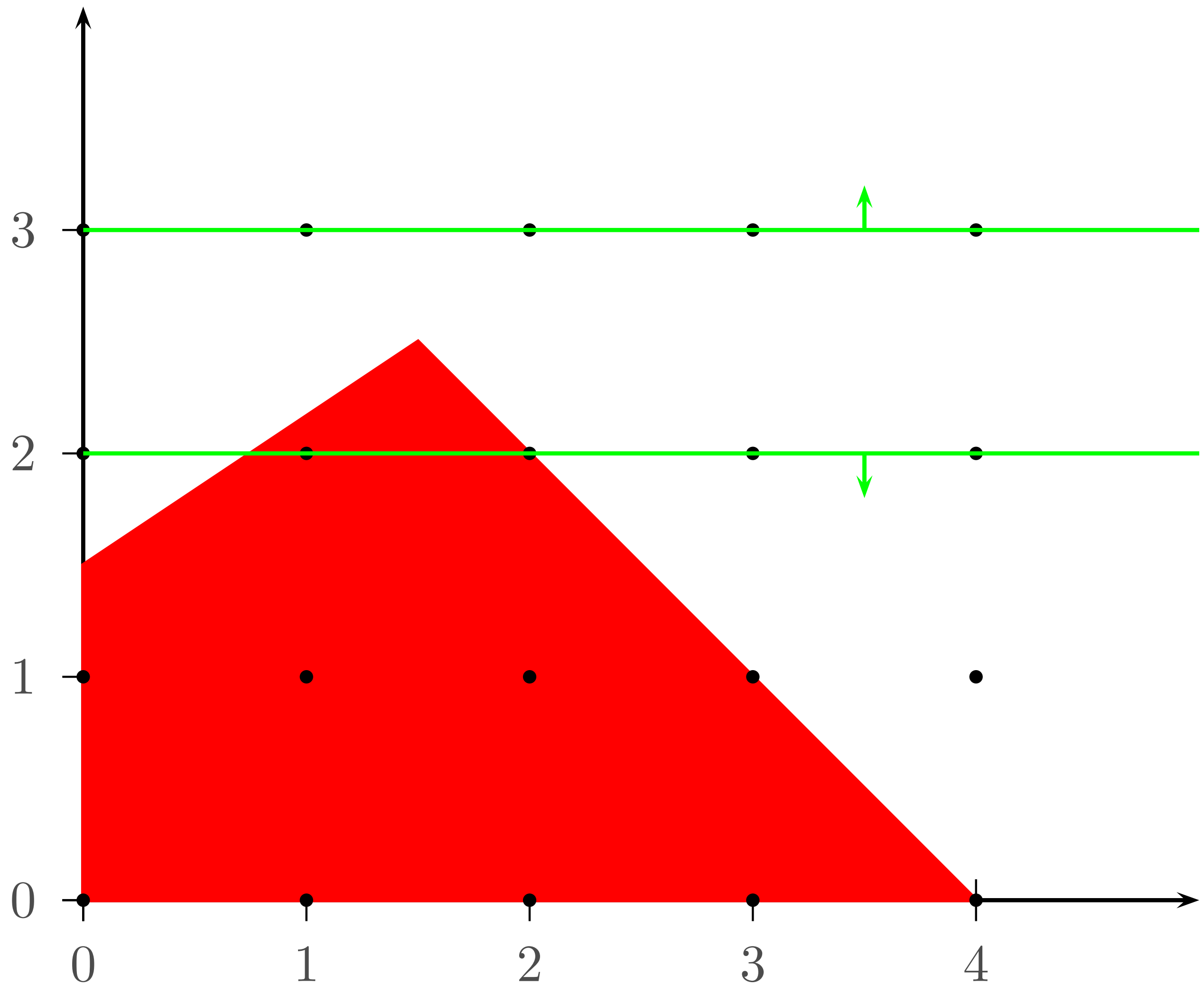


Exemple

- Solution optimale de $R(P_0)$: $(1.5, 2.5)$
- Borne pour P_0 : $b_0 = -3.5$
- $x_2 = 2.5$ est non entier. Partition :

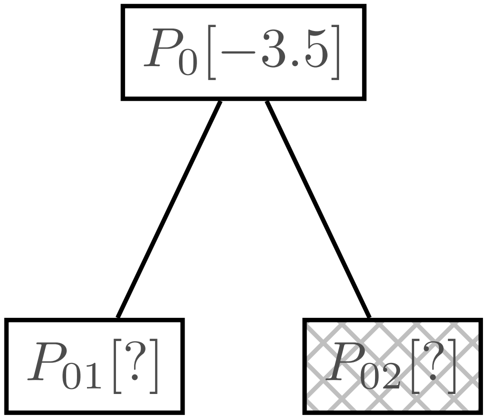
P_{01}	P_{02}
$\min x_1 - 2x_2$	$\min x_1 - 2x_2$
s.c.	s.c.
$\begin{array}{rcl} -4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{N} \\ x_2 & \leq & 2 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} -4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{N} \\ x_2 & \geq & 3 \end{array}$

Exemple



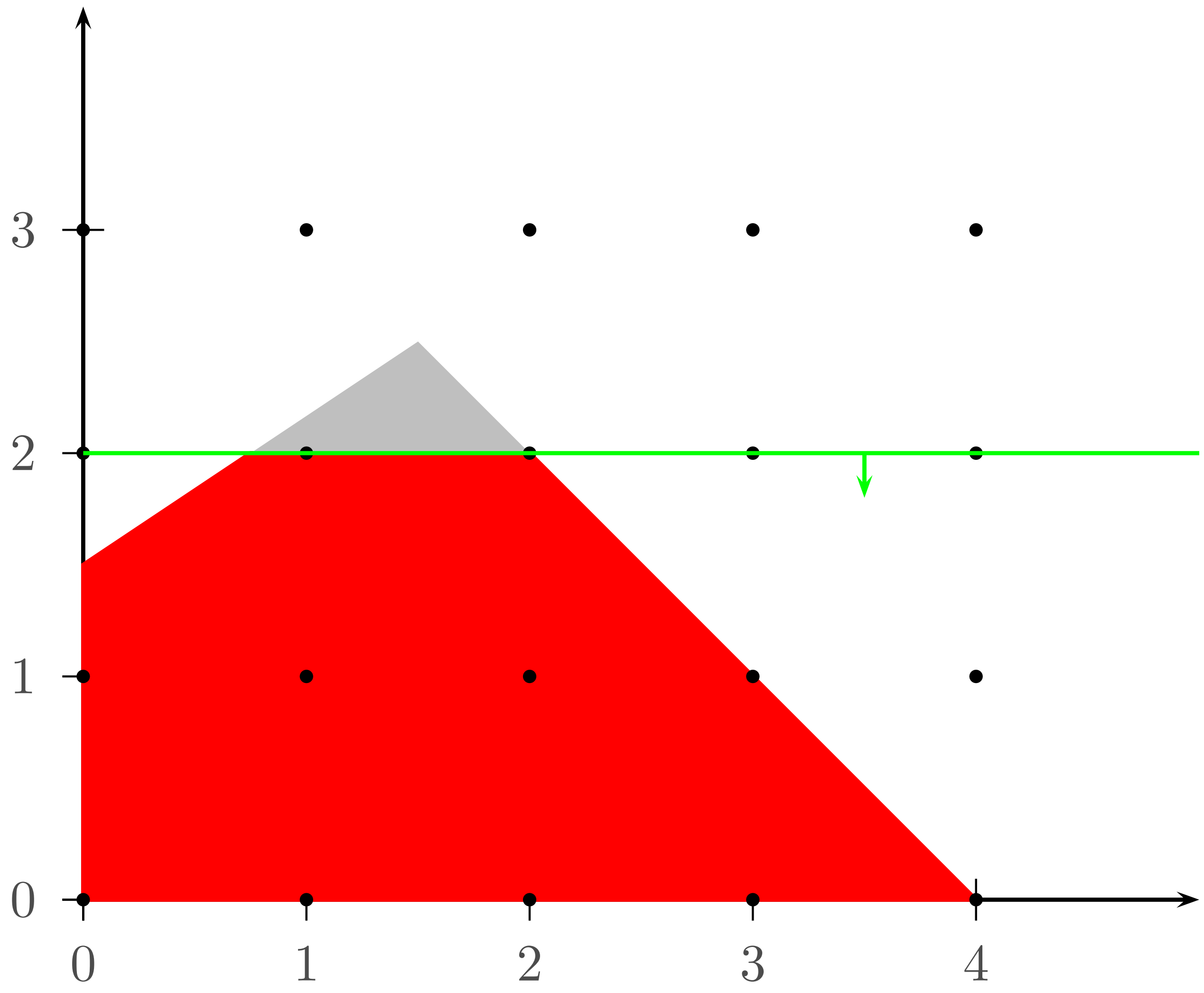
Exemple

$U = 0$



P_{02} est non admissible.

Exemple



Exemple

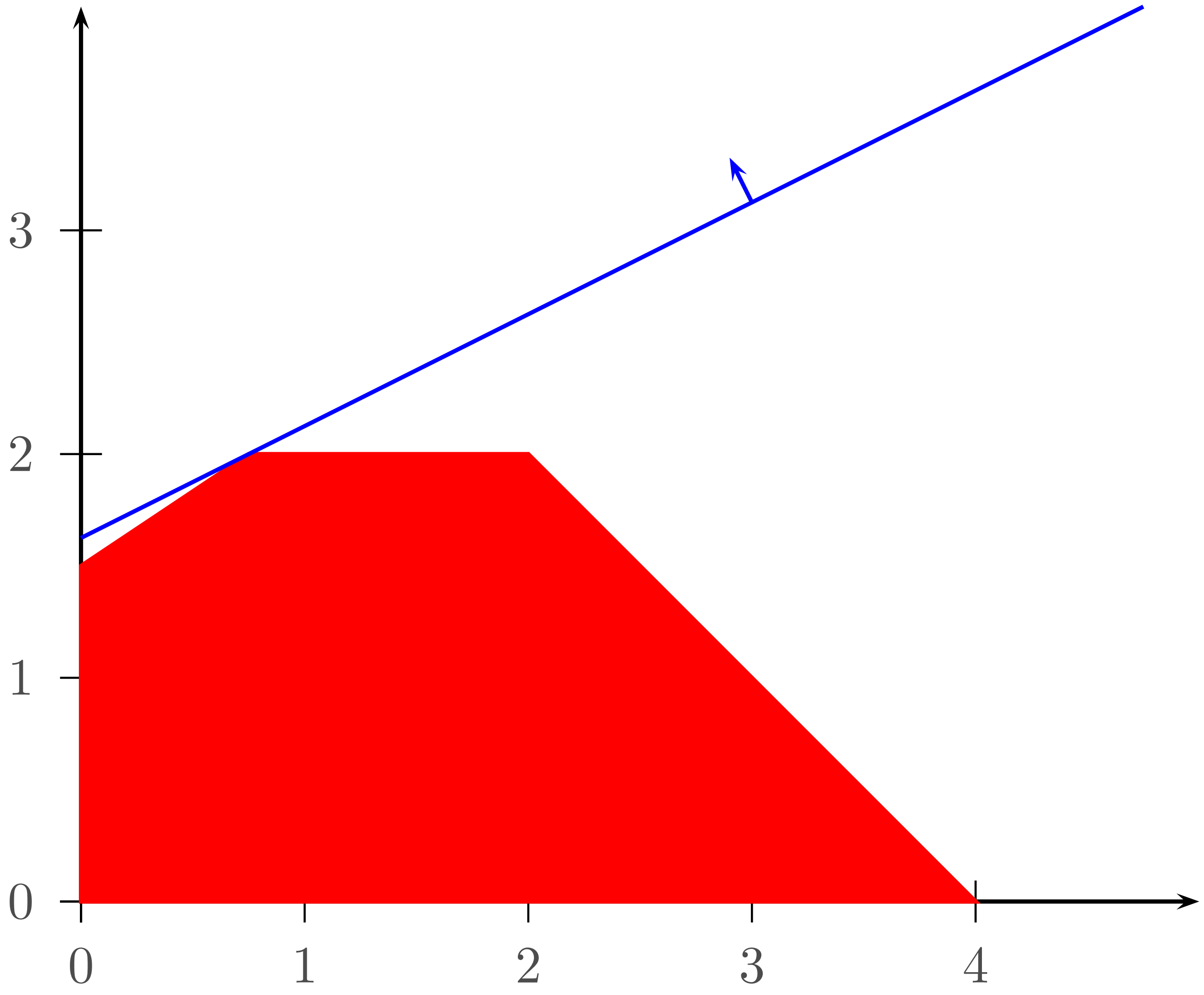
- Problème P_{01} : $\min x_1 - 2x_2$ sous contraintes

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Problème relaxé $R(P_{01})$: $\min x_1 - 2x_2$ sous contraintes

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Exemple



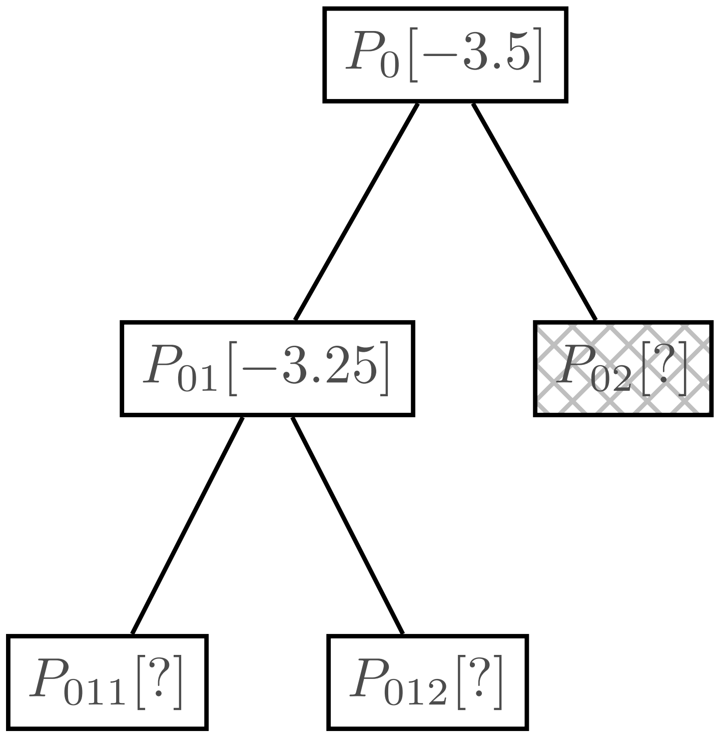
Exemple

- Solution optimale de $R(P_{01})$: $(0.75, 2)$
- Borne pour P_{01} : $b_{01} = -3.25$
- $x_1 = 0.75$ est non entier. Partition :

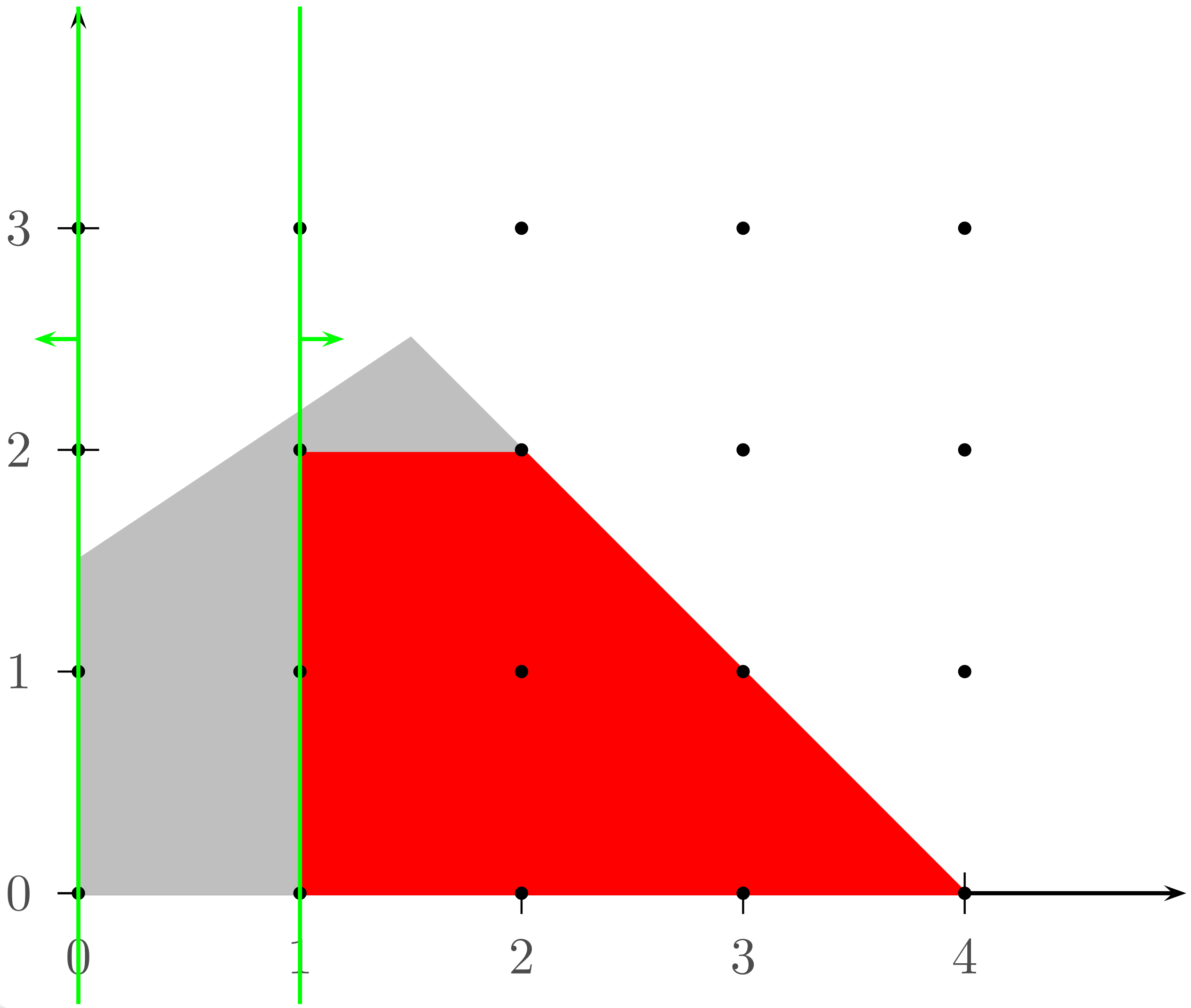
P_{011}	P_{012}
$\min x_1 - 2x_2$	$\min x_1 - 2x_2$
s.c.	s.c.
$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$	$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
$x_1 + x_2 \leq 4$	$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$	$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$
$x_2 \leq 2$	$x_2 \leq 2$
$x_1 \leq 0$	$x_1 \geq 1$

Exemple

$U = 0$



Exemple



Exemple

- Problème P_{011} : $\min x_1 - 2x_2$ sous contraintes

$$
\begin{array}{rcl}
-4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\
x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
x_2 & \leq & 2 \\
x_1 & \leq & 0 \\
x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}.
\end{array}
$$

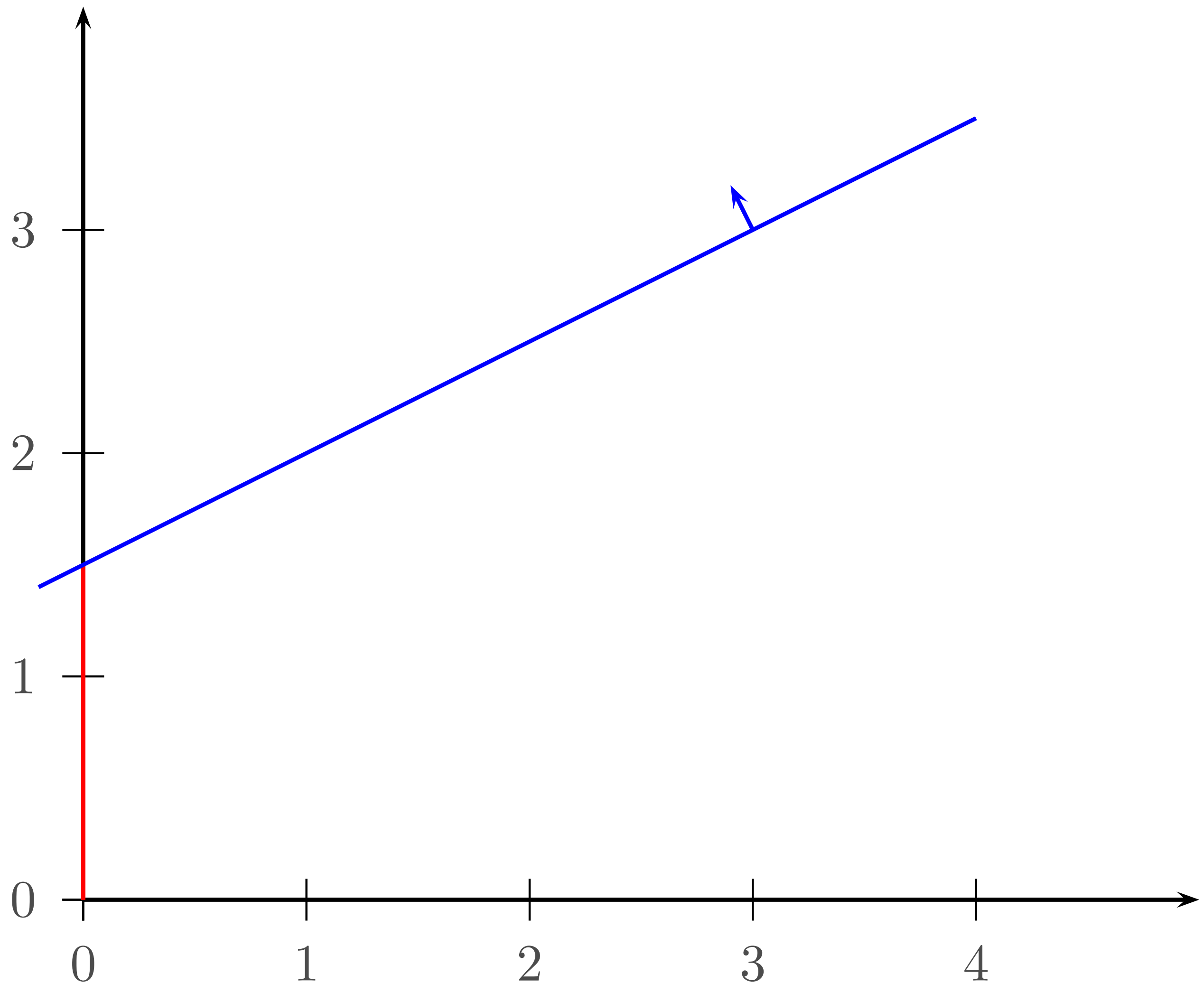
- Problème relaxé $R(P_{01})$: $\min x_1 - 2x_2$ sous contraintes

$$
\begin{array}{rcl}
-4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\
x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
x_2 & \leq & 2 \\
x_1 & \leq & 0
\end{array}
$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple



Exemple

- Solution optimale de $R(P_{011})$: $(0, 1.5)$
- Borne pour P_{011} : $b_{011} = -3$

Exemple

- Problème P_{012} : $\min x_1 - 2x_2$ sous contraintes

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

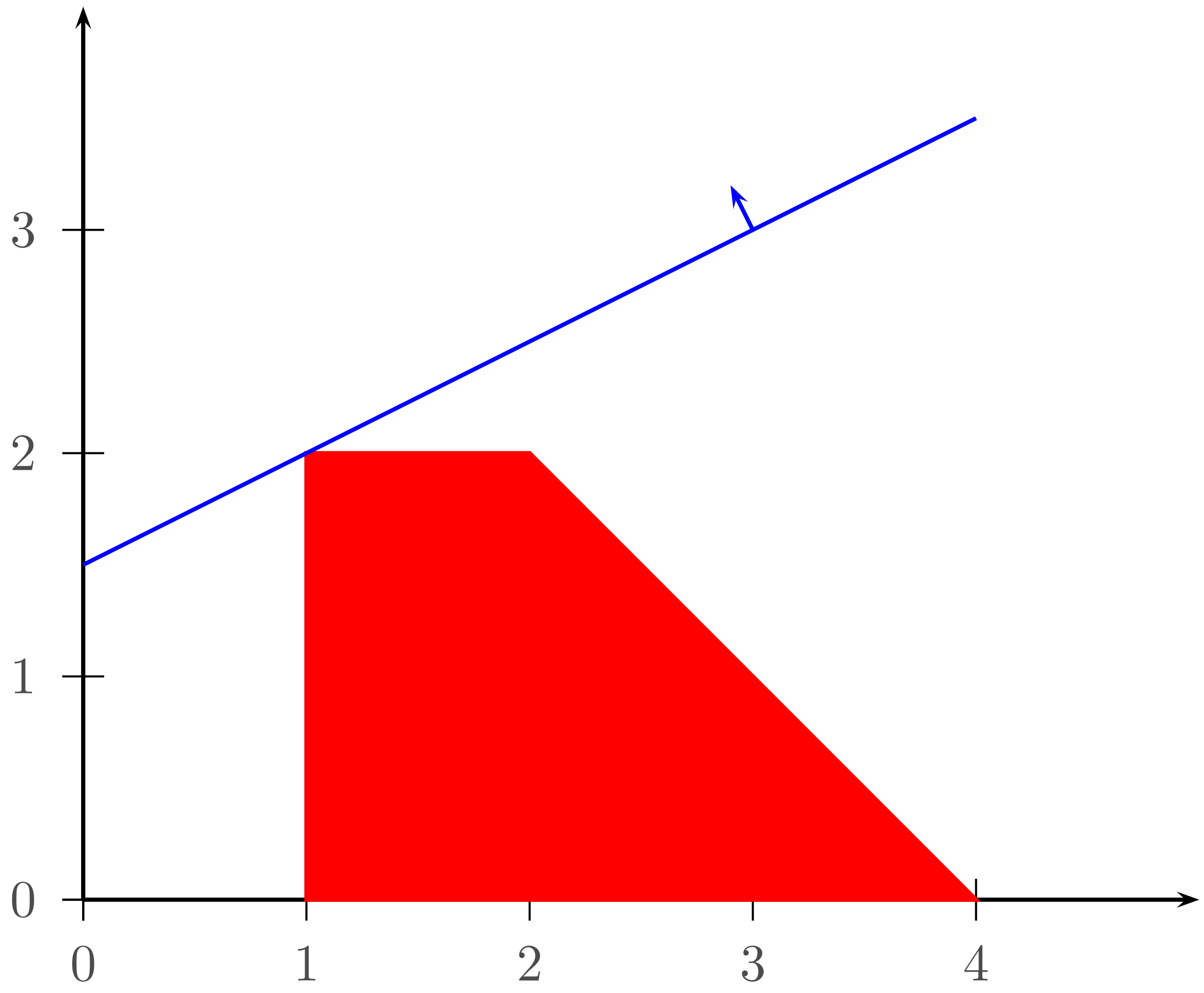
- Problème relaxé $R(P_{01})$: $\min x_1 - 2x_2$ sous contraintes

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 1 \end{aligned}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple

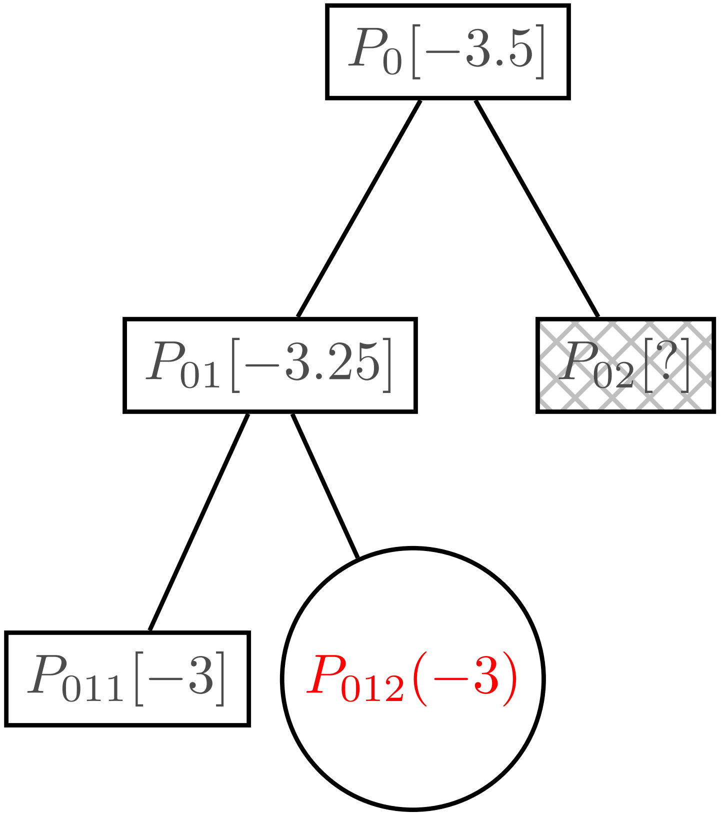


Exemple

- Solution optimale de $R(P_{012})$: $(1, 2)$
- Solution entière.
- C'est donc la solution optimale pour P_{012}.
- $U = -3$.

Exemple

$U = -3$

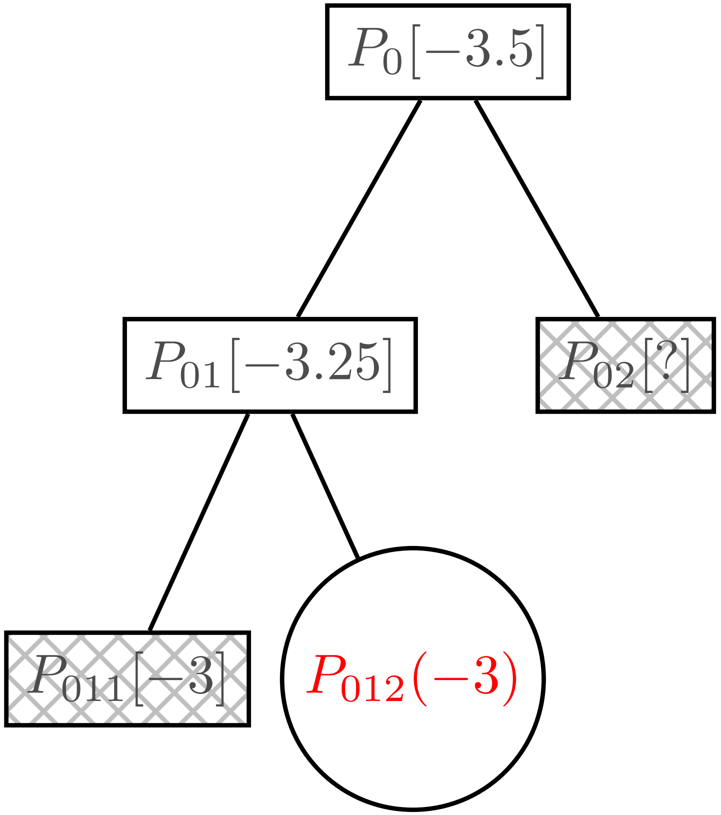


Exemple

- U a été modifié.
- Les sous-problèmes dont la borne est plus grande ou égale à U peuvent être supprimés.

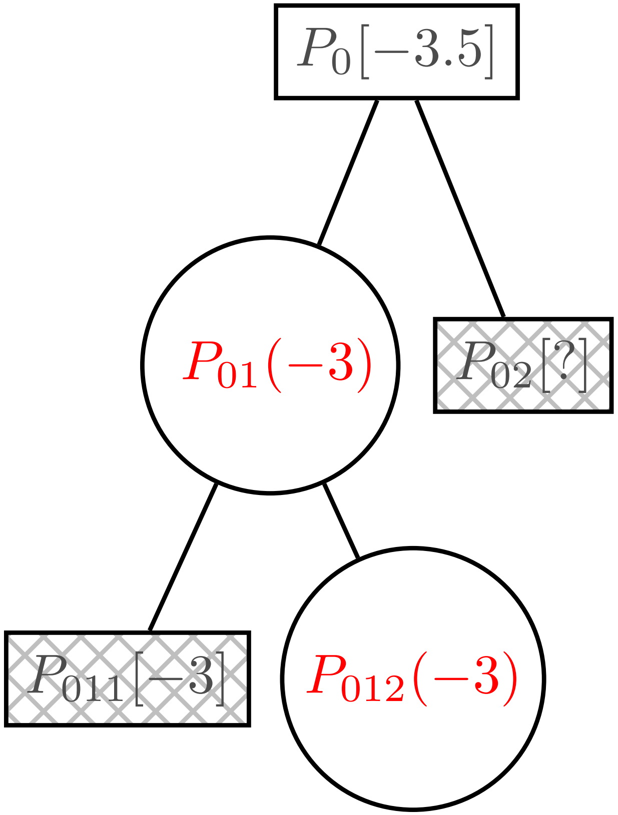
Exemple

$U = -3$



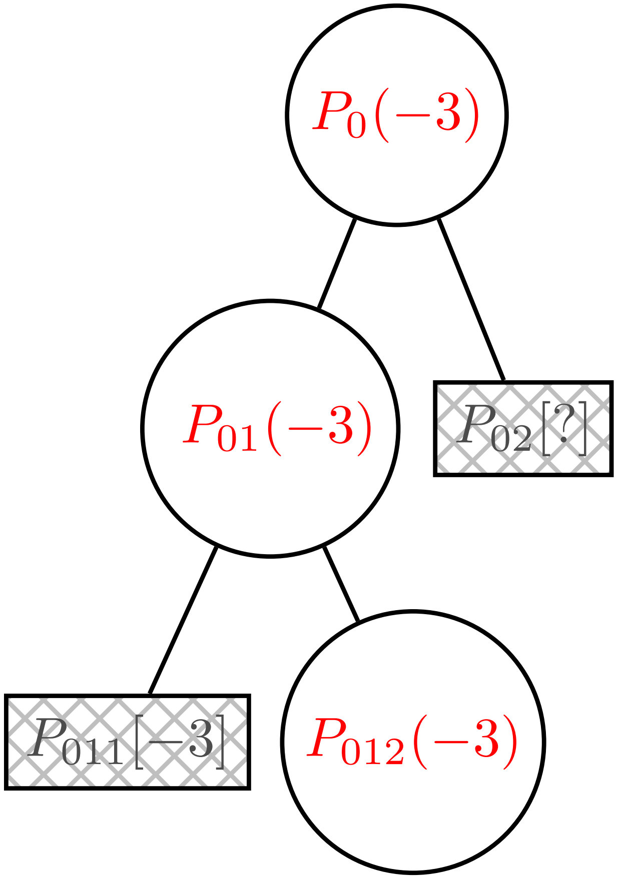
Exemple

$U = -3$



Exemple

$U = -3$



Résumé

- Optimisation en nombres entiers = problème difficile.
- Utiliser l'algorithme du simplexe et arrondir les solutions ne fonctionne en général pas.
- Méthode exacte : branch & bound
- Branch :
  - Diviser pour conquérir.
  - Partitionner l'ensemble admissible.
  - On obtient une série de problèmes plus simples.
- Bound :
  - Calculer une borne inférieure pour un problème avant de le résoudre.
  - Si cette borne est moins bonne que la meilleure solution trouvée jusque là, pas besoin de résoudre le problème.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Résumé

- Utilisation de la relaxation. C’est un problème continu.
  - Branch : éliminer les solutions non entières = “couper” le polytope.
  - Bound : solution du problème relaxé = borne pour le problème non relaxé.
- Les variantes sont nombreuses.
- Exemple : utilisation de la dualité (relaxation lagrangienne).