
Optimisation linéaire

Michel Bierlaire

`michel.bierlaire@epfl.ch`

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

Optimisation linéaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \\ g(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **linéaire**, $n > 0$
- $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **linéaire**, $m \geq 0$
- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ **linéaire**, $p \geq 0$

Optimisation linéaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0, \\ Cx - d &\leq 0. \end{aligned}$$

- $c \in \mathbb{R}^n, n > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq 0$
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}, d \in \mathbb{R}^p, p \geq 0$

Optimisation linéaire

Il est toujours possible d'écrire le problème sous la forme suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

- $c \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$.

Problème en forme standard

Exemple

$$\min_{x_1, x_2, x_3} 3x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$2x_1 - x_3 - 3 = 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

- Définir $x_i = y_i^+ - y_i^-$, avec $y_i^+, y_i^- \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.
- Introduire la variable d'écart $y_4 \geq 0$.

Exemple

$$\min_{y_1^p, y_1^m, y_2^p, y_2^m, y_3^p, y_3^m, y_4} 3(y_1^p - y_1^m) + 2(y_2^p - y_2^m)$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2y_1^p - 2y_1^m - y_3^p + y_3^m &= 3 \\ y_1^p - y_1^m - y_2^p + y_2^m + y_4 &= 0 \\ y_1^p, y_1^m, y_2^p, y_2^m, y_3^p, y_3^m, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Optimisation linéaire

... ou la forme suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$Ax \leq b.$$

- $c \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$.

Problème en forme canonique

Exemple

$$\min_{x_1, x_2, x_3} 3x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &\leq 3 \\ -2x_1 + x_3 &\leq -3 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fonction objectif

- Linéaire
- Gradient constant :

$$f(x) = c^T x, \quad \nabla f(x) = c$$

- S'il n'y avait pas de contrainte, solution triviale :
 - Si $c = 0$, tout x est solution.
 - Si $c \neq 0$, le problème n'est pas borné.
- Analysons donc les contraintes
 - d'un point de vue algébrique
 - d'un point de vue géométrique

Contraintes

Considérons le problème en forme standard :

$$Ax = b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m.$$

Contraintes d'égalité :

$$Ax = b$$

Trois possibilités pour le nombre de solutions :

- Système non singulier : une seule solution
- Système incompatible : aucune solution
- Système sous déterminé : une infinité de solutions

Seul le dernier point est pertinent pour l'optimisation.

Contraintes

- Objectif : trouver la meilleure solution parmi le nombre infini de solutions qui vérifient les contraintes
- Deux types de contraintes : $Ax = b$ et $x \geq 0$
- Solutions admissibles pour $Ax = b$: élimination des contraintes par substitution
- Contraintes actives pour $x \geq 0$: quelles variables doivent être mises à zéro ?
- Interprétation géométrique :
 - l'ensemble des contraintes forment un polytope
 - la solution optimale se trouve sur un sommet de ce polytope.

Résolution graphique

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} -x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

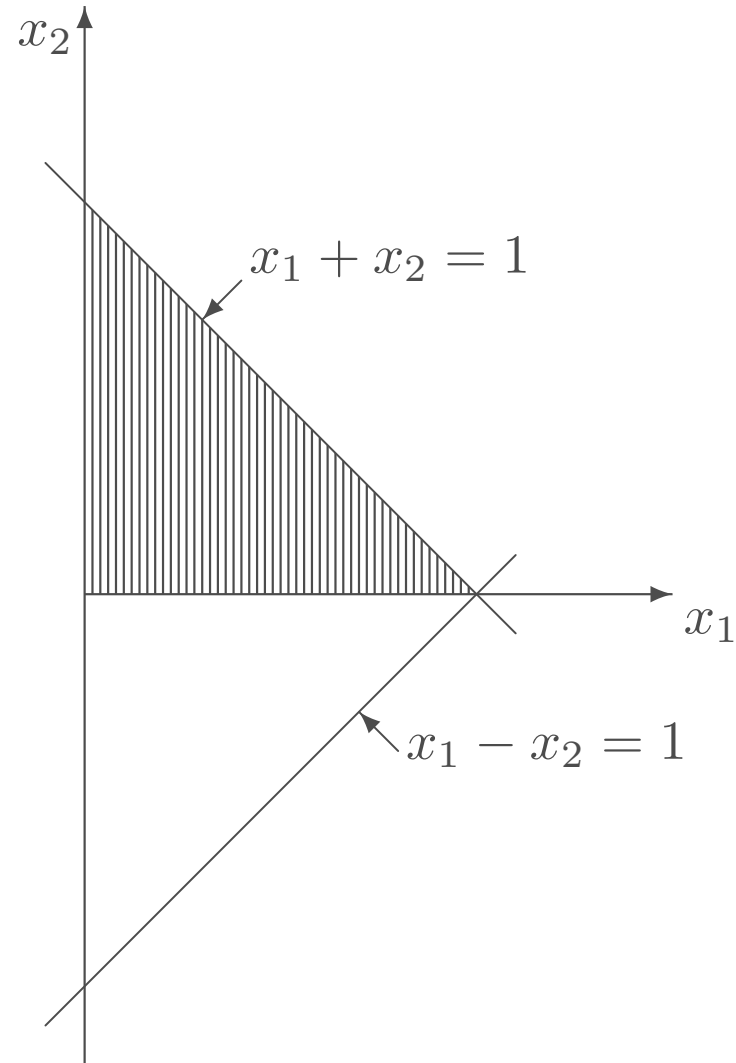
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Résolution graphique



Résolution graphique

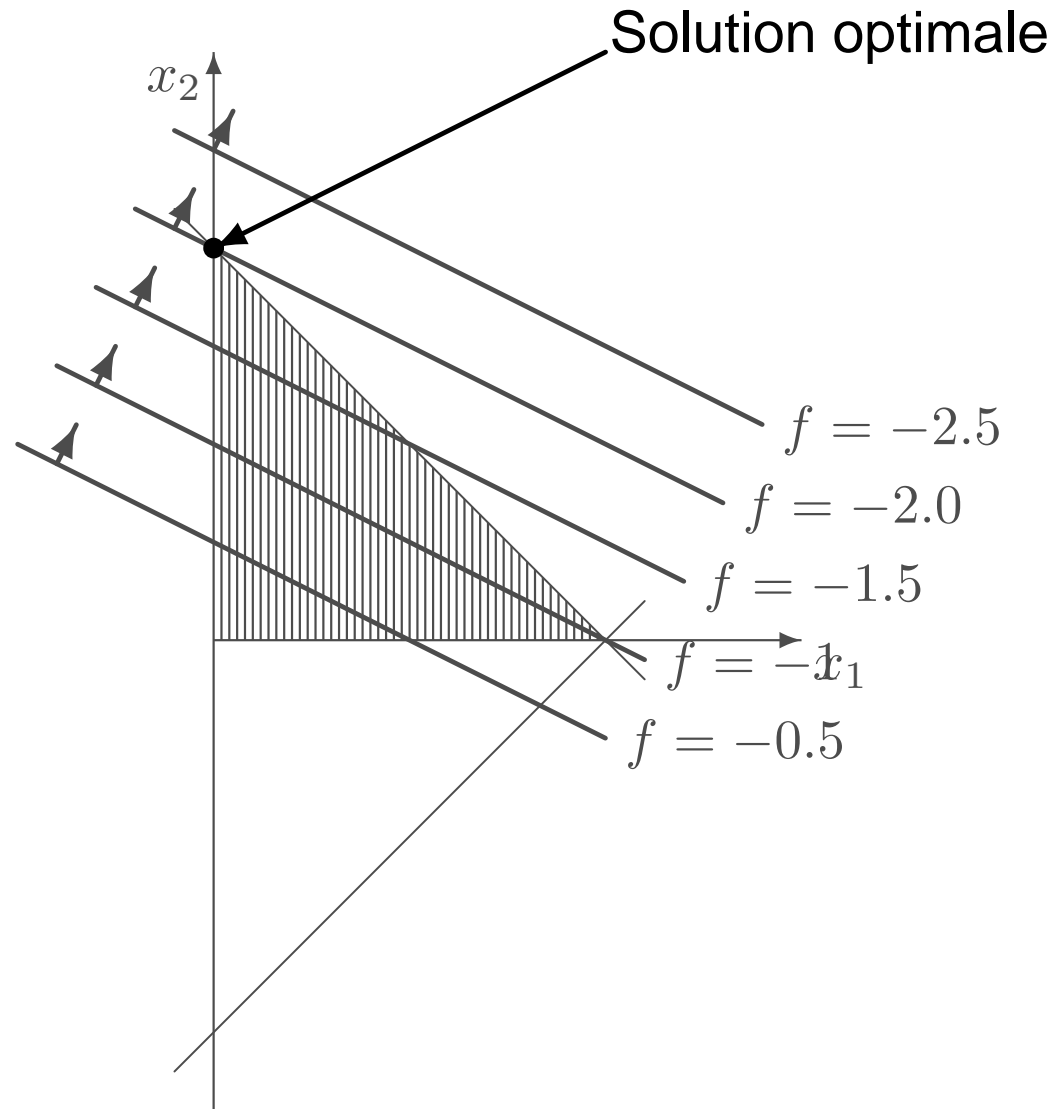
- Fonction objectif linéaire, donc les courbes de niveau sont des droites
- Gradient :

$$f(x) = c^T x, \quad \nabla f(x) = c$$

- Direction de la plus forte descente : $-c$.
- Toutes les “droites” de niveau sont perpendiculaires au vecteur

$$-\nabla f(x) = -c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résolution graphique



Contraintes redondantes

Contraintes redondantes Soit un système compatible de contraintes d'égalité linéaires $Ax = b$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$. Si le rang de A est déficient, c'est-à-dire $\text{rang}(A) = r < m$, alors il existe une matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ de rang plein (i.e. $\text{rang}(\tilde{A}) = r$), composée exclusivement de lignes ℓ_1, \dots, ℓ_r de A telle que

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \iff Ax = b. \quad (1)$$

où \tilde{b} est composée des éléments ℓ_1, \dots, ℓ_r de b .

(p. 63)

Autrement dit, si le rang de A est r , on peut éliminer $m - r$ contraintes sans modifier la nature du problème.

Contraintes redondantes

Soient les contraintes

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rang $A=2$ car, si l_i est la ligne i ,

$$l_3 = -2l_1 + 3l_2$$

et la dernière contrainte peut être éliminée.

Elimination des contraintes par substitution

Exemple :

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sous contraintes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Récrivons les contraintes d'égalité:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

$$x_4 = 1 - x_1 + x_2.$$

pour obtenir

$$\min x_1 + x_2 + (1 - x_1 - x_2) + 1 - x_1 + x_2 = -x_1 + x_2 + 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Elimination des contraintes par substitution

Généralisons pour

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \leq n, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, \text{rang}(A) = m)$$

- Choisissons m colonnes linéairement indépendantes de A
- Permutons les colonnes pour les placer à gauche.

$$AP = (B \ N)$$

- $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de permutation (telle que $PP^T = I$)
- $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ contient les m colonnes choisies, et est donc inversible
- $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ contient les autres colonnes

Elimination des contraintes par substitution

- Permutons le vecteur x , et appelons x_B les m premières composantes, et x_N les autres.

$$P^T x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

- Récrivons les contraintes :

$$Ax = AP(P^T x) = (B \ N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b$$

- On peut maintenant écrire x_B en fonction de x_N

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N).$$

Elimination des contraintes par substitution

Reprenons l'exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminons x_3 et x_4 . Permutons les colonnes pour placer les colonnes 3 et 4 au début :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elimination des contraintes par substitution

$$AP = (B|N) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= B^{-1}(b - Nx_N) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - x_1 - x_2 \\ 1 - x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Point de vue algébrique : résumé

- Système d'équations $Ax = b$ sous-déterminé : $m \leq n$
- Possibilité d'ignorer les contraintes redondantes : A de rang plein
- Elimination des contraintes par substitution
- Note : ne pas oublier les contraintes $x \geq 0$
- Question : quelles contraintes d'inégalité sont actives à la solution

Polytope

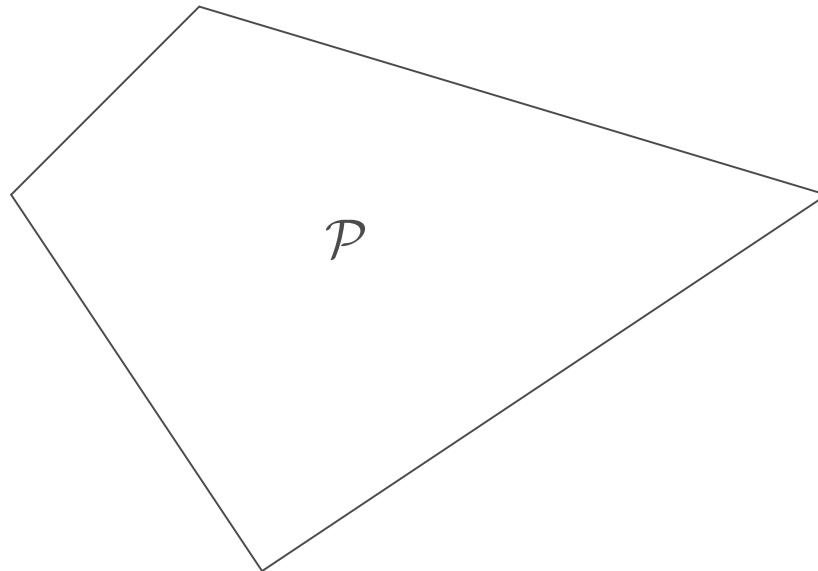
Analysons les contraintes d'un point de vue géométrique

Polytope

Un polytope est un ensemble de points de \mathbb{R}^n délimité par des hyperplans, c'est-à-dire

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Il s'agit de la généralisation à \mathbb{R}^n pour $n \geq 4$ de la notion de polygone dans \mathbb{R}^2 et de polyèdre dans \mathbb{R}^3 .



Polytope

Polytope en forme standard

Un polytope en forme standard est un polytope défini de la manière suivante

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

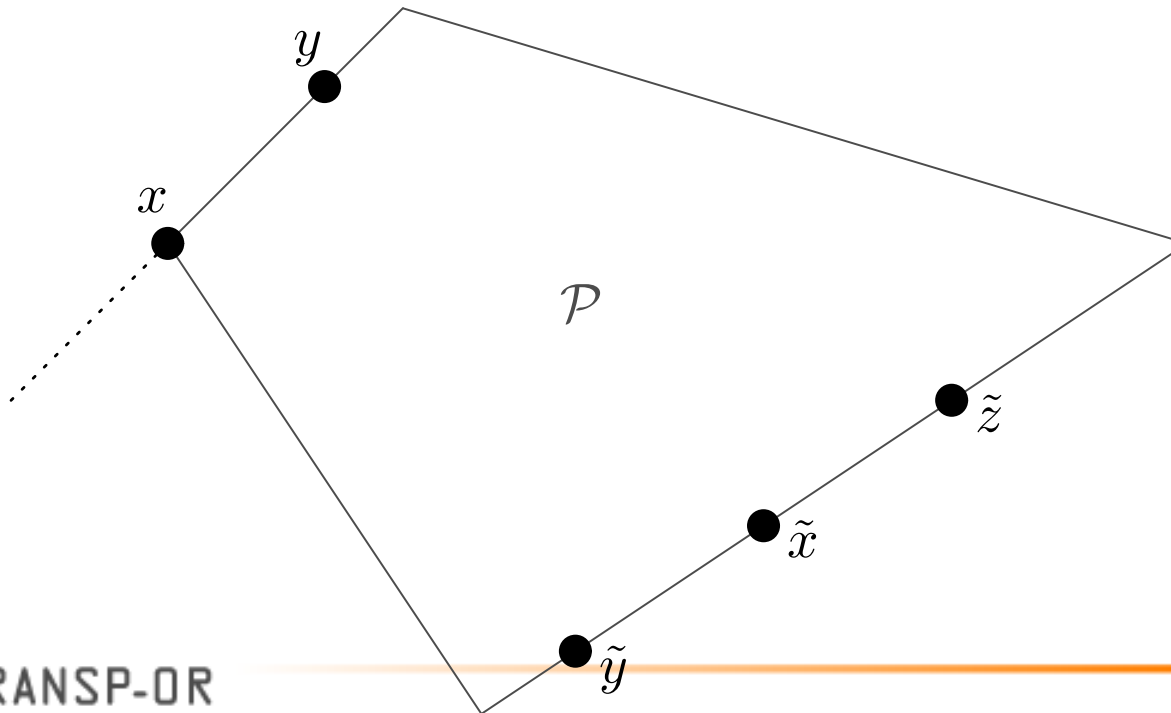
Pour l'optimisation, les sommets du polytope sont importants

Polytope

Sommet

Soit \mathcal{P} un polytope. Un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est un sommet de \mathcal{P} s'il est impossible de trouver deux vecteurs y et z dans \mathcal{P} , différents de x tels que x soit combinaison convexe de y et z , c'est-à-dire tels qu'il existe un réel $0 < \lambda < 1$ tel que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$



Polytope : identification des sommets

- Soit un polytope en forme standard
- Pour identifier un de ses sommets, appliquer la procédure suivante :
 1. Choisir m variables à éliminer.
 2. Identifier la matrice B rassemblant les colonnes de A correspondantes.
 3. Poser $x_N = 0$,
 4. Dans ce cas, $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$ s'écrit $x_B = B^{-1}b$. Si $x_B \geq 0$, alors

$$x = P \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_B \\ 0_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}$$

est un sommet du polytope. (p. 91)

Polytope : solution de base

Solution de base

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope en forme standard, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ est appelé solution de base de \mathcal{P} s'il existe des indices j_1, \dots, j_m tels que

1. la matrice $B = (A_{j_1} \cdots A_{j_m})$ composée des colonnes j_1, \dots, j_m de la matrice A est non singulière et
2. $x_i = 0$ si $i \neq j_1, \dots, j_m$.

Si de plus $B^{-1}b \geq 0$, le vecteur x est appelé solution de base admissible.

- Les variables j_1, \dots, j_m s'appellent les *variables en base*
- Les autres s'appellent les *variables hors-base*

Polytope : solution de base

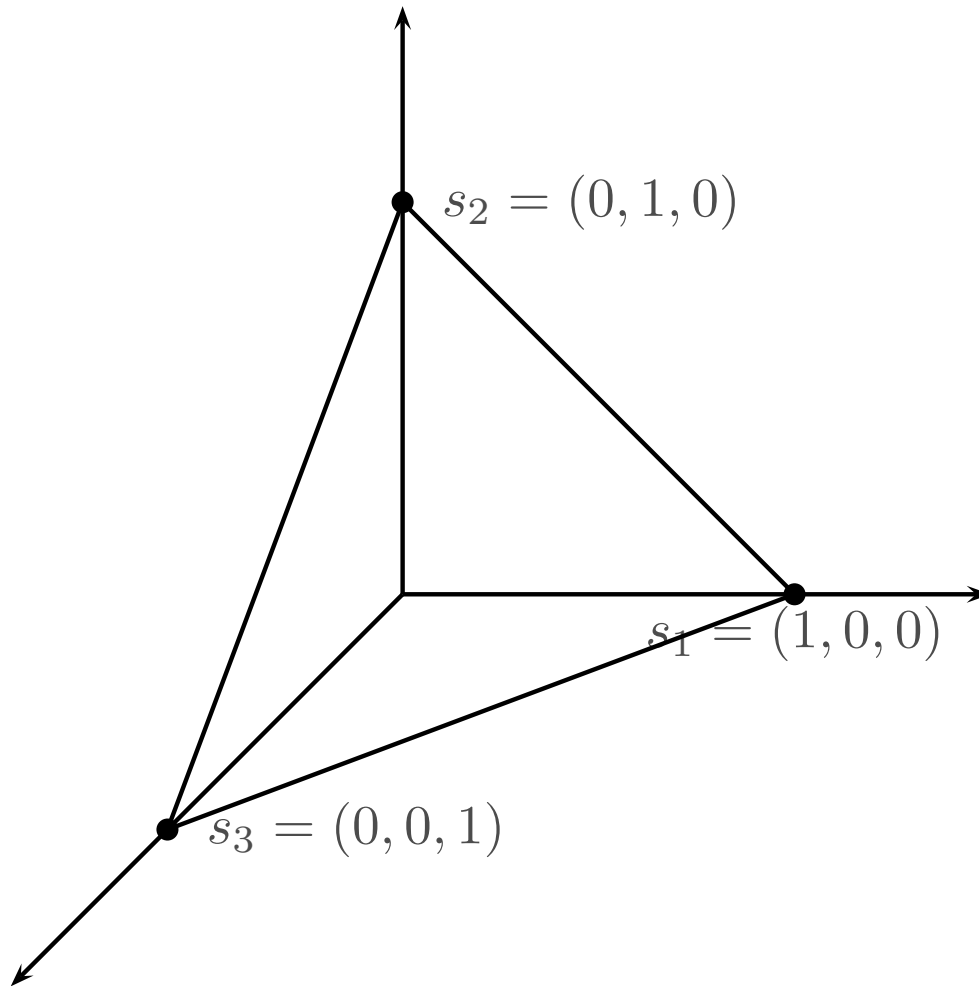
Equivalence entre sommets et solutions de base admissible

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope. Le point $x^* \in \mathcal{P}$ est un sommet de \mathcal{P} si et seulement s'il est une solution de base admissible.

(p. 98)

Exemple 1

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



Exemple 1

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

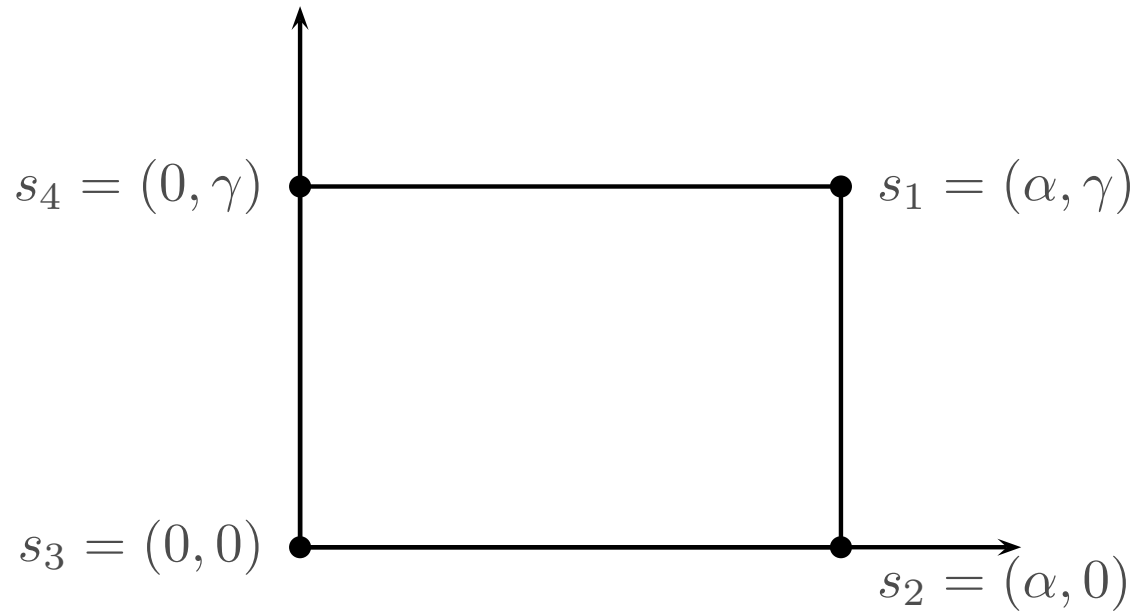
$$A = (1 \ 1 \ 1), \quad b = 1, \quad m = 1, \quad n = 3.$$

- Choix de la colonne en base : $j = 1$
- $B = 1$
- $x_1 = B^{-1}b = 1 \geq 0$
- Variables hors-base : $x_2 = x_3 = x_4 = 0$
- Solution de base admissible:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq \alpha, 0 \leq x_2 \leq \gamma\}$$



Exemple 2

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq \alpha, 0 \leq x_2 \leq \gamma\}$$

Forme standard :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = \alpha, x_2 + x_4 = \gamma, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, n = 4, m = 2$$

- Variables en base : 1, 2
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_3 = x_4 = 0$
- Solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Cela correspond à s_1

Exemple 2

- Variables en base : 2, 3

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_1 = x_4 = 0$
- Solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Cela correspond à s_4

Exemple 2

Possibilités d'être en base :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ici, $n = 4$, $m = 2$, donc 6 possibilités :

- 1 et 2 : s_1
- 1 et 3 : dépendance linéaire
- 1 et 4 : s_2
- 2 et 3 : s_4
- 2 et 4 : dépendance linéaire
- 3 et 4 : s_3

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, n = 7, m = 4$$

- Variables en base : 4, 5, 6, 7
- Matrice de base :

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- Solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : autre base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, n = 7, m = 4$$

- Variables en base : 3, 5, 6, 7
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : autre base

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_1 = x_2 = x_4 = 0$.
- Solution de base **non** admissible, car $x_5 = -12 \not\geq 0$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solution de base dégénérée

Solution de base dégénérée

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope en forme standard, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Une solution de base $x \in \mathbb{R}^n$ est dite dégénérée si plus de n contraintes sont actives en x , c'est-à-dire si plus de $n - m$ composantes de x sont nulles.

- Dans ce cas, au moins une variable en base est nulle
- Plusieurs bases peuvent correspondre à la même solution

Exemple 3 : base dégénérée 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, n = 7, m = 4$$

- Variables en base : 1, 2, 3, 7
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : base dégénérée 1

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.
- Solution de base dégénérée, car $x_2 = 0$ est en base :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : base dégénérée 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad n = 7, \quad m = 4$$

- Variables en base : 1, 3, 5, 7
- Matrice de base :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 : base dégénérée 2

- Variables en base :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Variables hors-base : $x_2 = x_4 = x_6 = 0$.
- Solution de base dégénérée, car $x_5 = 0$ est en base :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Idées algorithmiques

- La solution du problème d'optimisation se trouve sur un sommet du polytope
- Une solution de base admissible correspond à un sommet
- Une solution de base admissible est obtenue en choisissant quelles variables sont en bases
- Proposition d'algorithme :
 1. Enumérer les solutions de base admissible
 2. Pour chacune d'elle, calculer la fonction objectif $c^T x$
 3. Identifier celle qui correspond à la plus petite valeur
- Nécessite de considérer

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Idées algorithmiques

- Ce nombre explose exponentiellement avec n et m
- Supposons qu'il faille 1/100ième de seconde pour évaluer une solution
- Si $n = 26$ et $m = 13$, il faudra 33 ans pour trouver la solution
- Si $n = 52$ et $m = 26$, il faudra 1.5 milliards d'années pour trouver la solution

Autre idée : algorithme itératif

- Démarrer d'un sommet
- Identifier une direction
 - admissible
 - de descente
- Calculer un pas qui mène à un autre sommet.

Direction admissible

Direction admissible

Soit le problème général d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

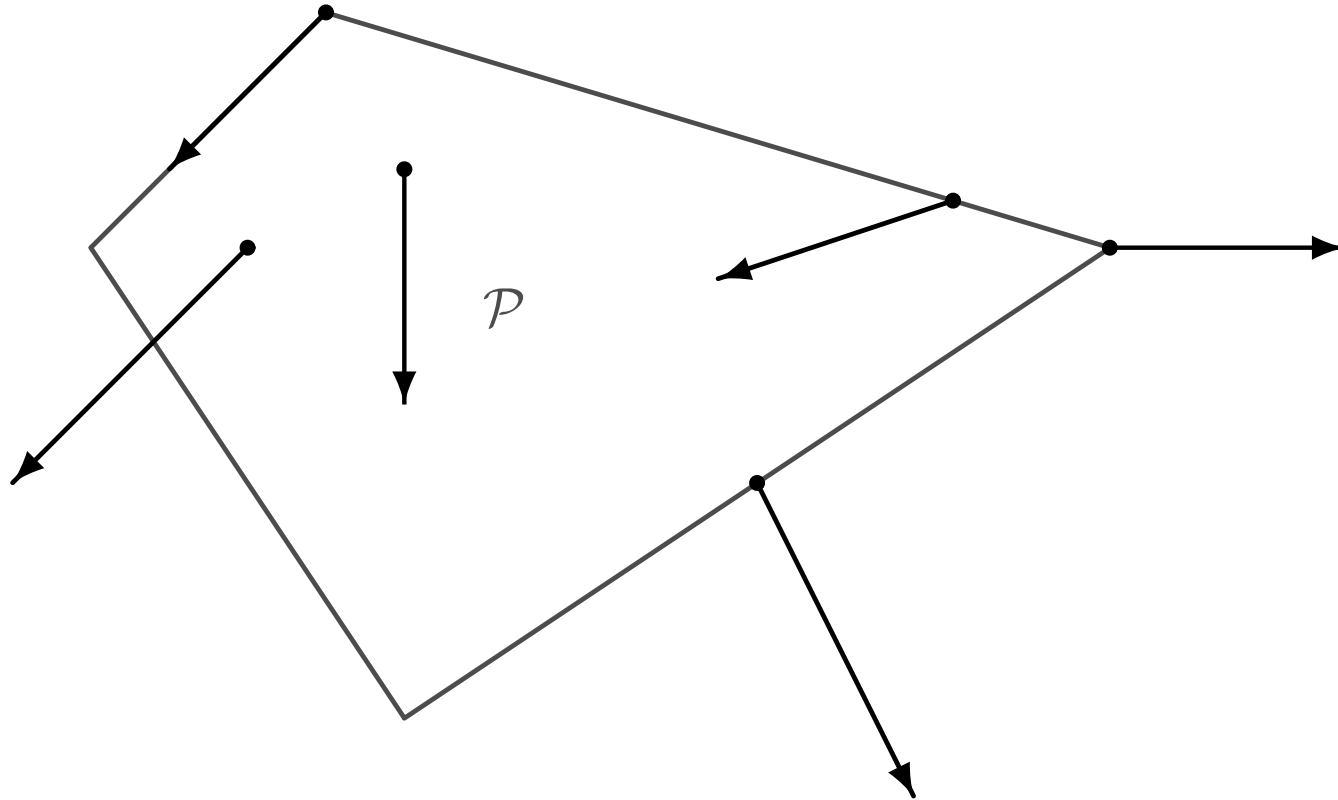
sous contraintes

$$h(x) = 0,$$

$$g(x) \leq 0,$$

et soit un point $x \in \mathbb{R}^n$ admissible. Une direction d sera dite admissible en x s'il existe $\eta > 0$ tel que $x + \alpha d$ soit admissible pour tout $0 < \alpha \leq \eta$.

Direction admissible



Direction admissible

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$Ax = b, \quad x \geq 0.$$

- Soit une direction $d \in \mathbb{R}^n$.
- Considérons $x + \alpha d$, avec $0 < \alpha \leq \eta$
- Condition nécessaire pour d admissible :

$$A(x + \alpha d) = Ax + \alpha Ad = b$$

- Comme $Ax = b$, la condition s'écrit

$$Ad = 0.$$

- Il faut encore vérifier que $x + \alpha d \geq 0$.

Direction admissible

- Soit une solution de base admissible :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Considérons une direction $d \in \mathbb{R}^n$ décomposée de la même manière :

$$d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$$

- La condition $Ad = 0$ s'écrit

$$Bd_B + Nd_N = 0$$

et donc

$$d_B = -B^{-1}Nd_N$$

Direction admissible

- Le choix d'une direction admissible se ramène au choix de d_N
- Choisissons une variable hors-base j
- Définissons :

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{ième position}$$

Direction admissible

- La partie en base s'écrit

$$d_B = -B^{-1}Nd_N = -B^{-1}A_k.$$

où $A_k = Nd_N$ est la k ième colonne de la matrice N .

- A_k est la colonne de A correspondant à la variable hors-base k .

Direction admissible

- Il faut aussi garantir que $x + \alpha d \geq 0$.
 - Variables hors-base :
 - $(x)_k$ était nulle et devient positive : $(x)_k + \alpha(d_k)_k = \alpha > 0$
 - $(x)_i, i \neq k$ restent à zéro: $(x)_i + \alpha(d_k)_i = (x)_i \geq 0$
 - Variables de base :
 - Si x est non dégénérée, les variables de base sont strictement positives. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que $x_B + \alpha d_B \geq 0, 0 < \alpha \leq \eta$.
 - Si x est dégénérée, il n'y a pas de garantie que la direction de base soit admissible.

Direction de base

Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope en forme standard, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$ et $x \in \mathbb{R}^n$ une solution de base admissible de \mathcal{P} . Une direction d est appelée k ème direction de base en x si k est l'indice d'une variable hors base, et

$$d_k = P \begin{pmatrix} d_{B_k} \\ d_{N_k} \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de permutation correspondant à la solution de base x , $d_{B_k} = -B^{-1}A_k$, et d_{N_k} est tel que

$$P^T e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{N_k} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que tous les éléments de d_{N_k} sont nuls, sauf celui correspondant à la variable k qui vaut 1.

Exemple

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

Forme standard :

$$\mathcal{P} = \left\{ x = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

avec

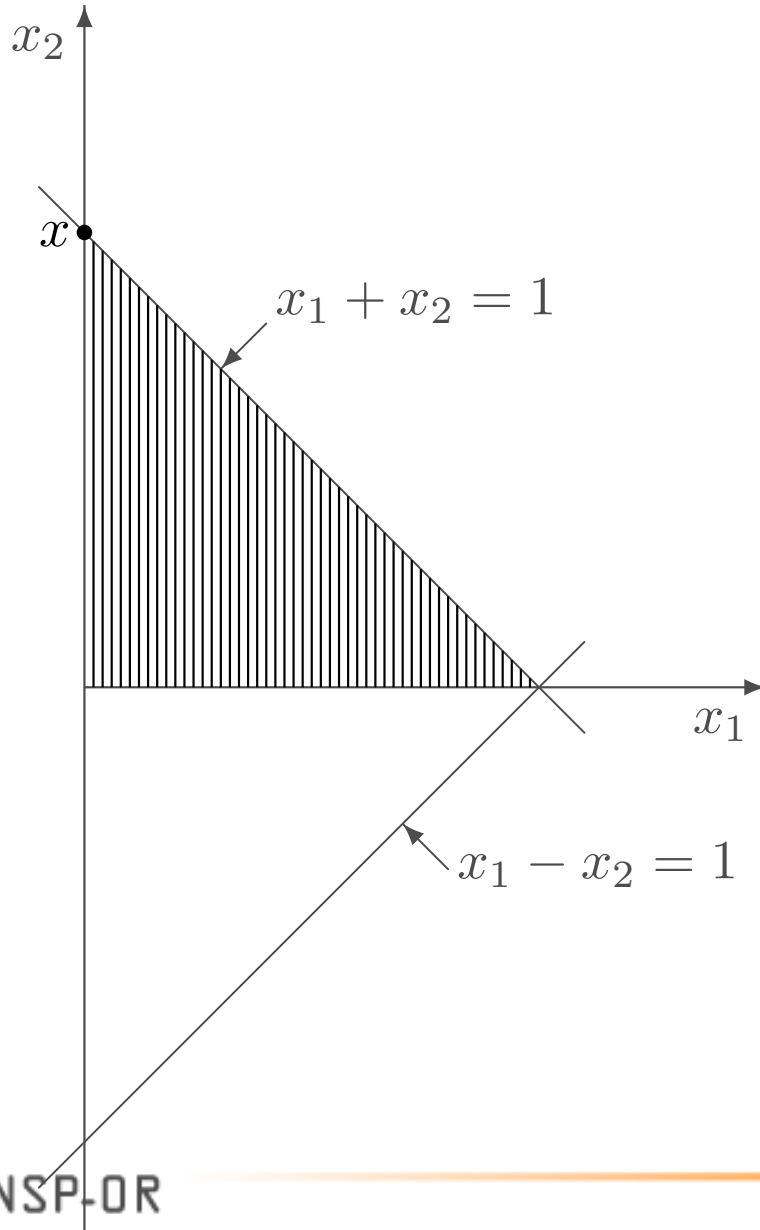
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

- Variables en base : 2 et 4
- Variables hors-base : 1 et 3
- Solution de base admissible :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple



$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Exemple

- Direction de base correspondant à x_1

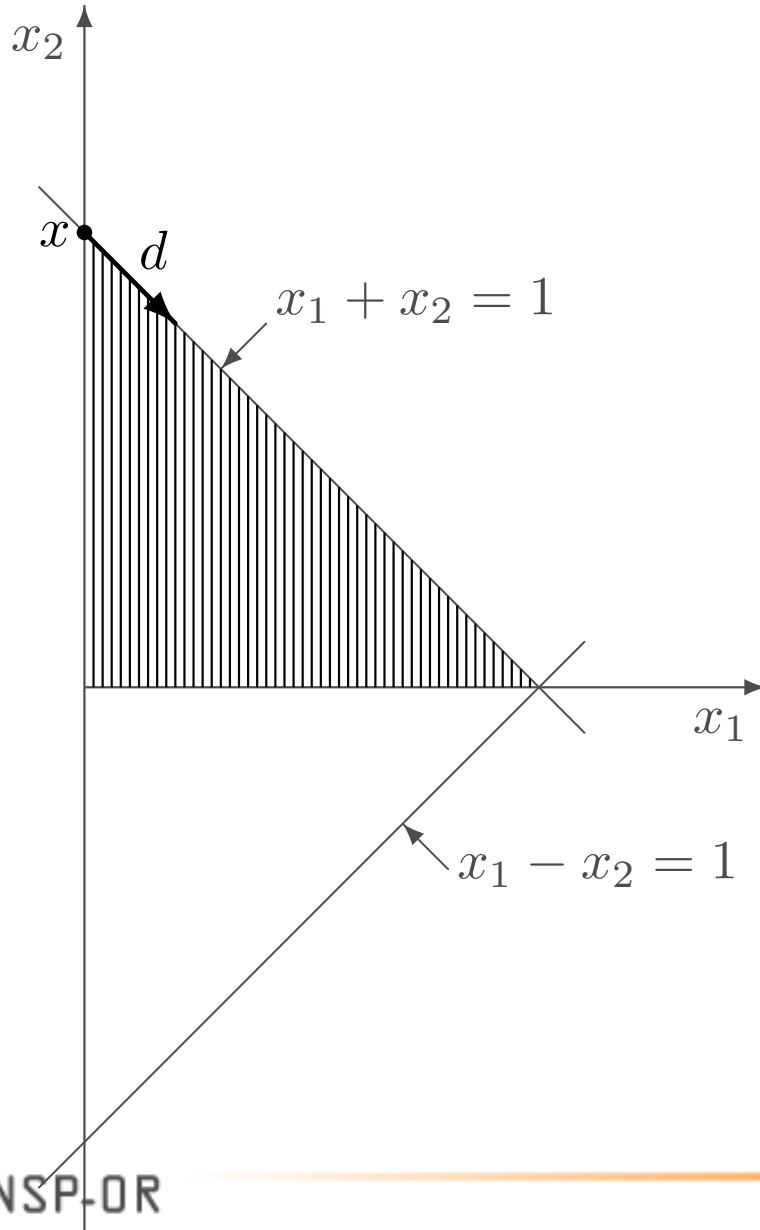
$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_1 \\ (d)_3 \end{pmatrix}$$

$$d_B = -B^{-1}A_1 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_2 \\ (d)_4 \end{pmatrix}$$

En rassemblant les deux parties :

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \\ 0 \\ 2 - 2\alpha \end{pmatrix} \geq 0 \text{ si } \alpha \leq 1.$$

Exemple



$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

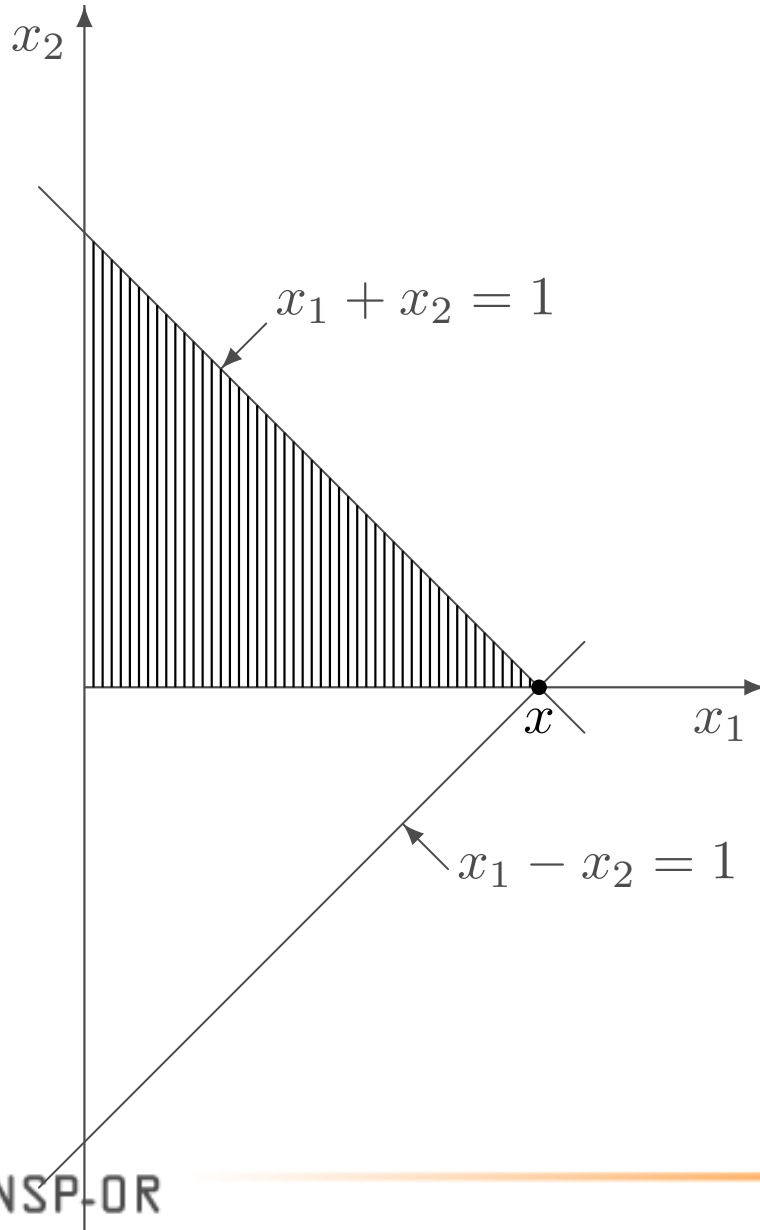
$$x_2 \geq 0$$

Exemple

- Variables en base : 1 et 2
- Variables hors-base : 3 et 4
- Solution de base admissible :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple



$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Exemple

- Direction de base correspondant à x_3

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_3 \\ (d)_4 \end{pmatrix}$$

$$d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d)_1 \\ (d)_2 \end{pmatrix}$$

En rassemblant les deux parties :

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x + \alpha d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

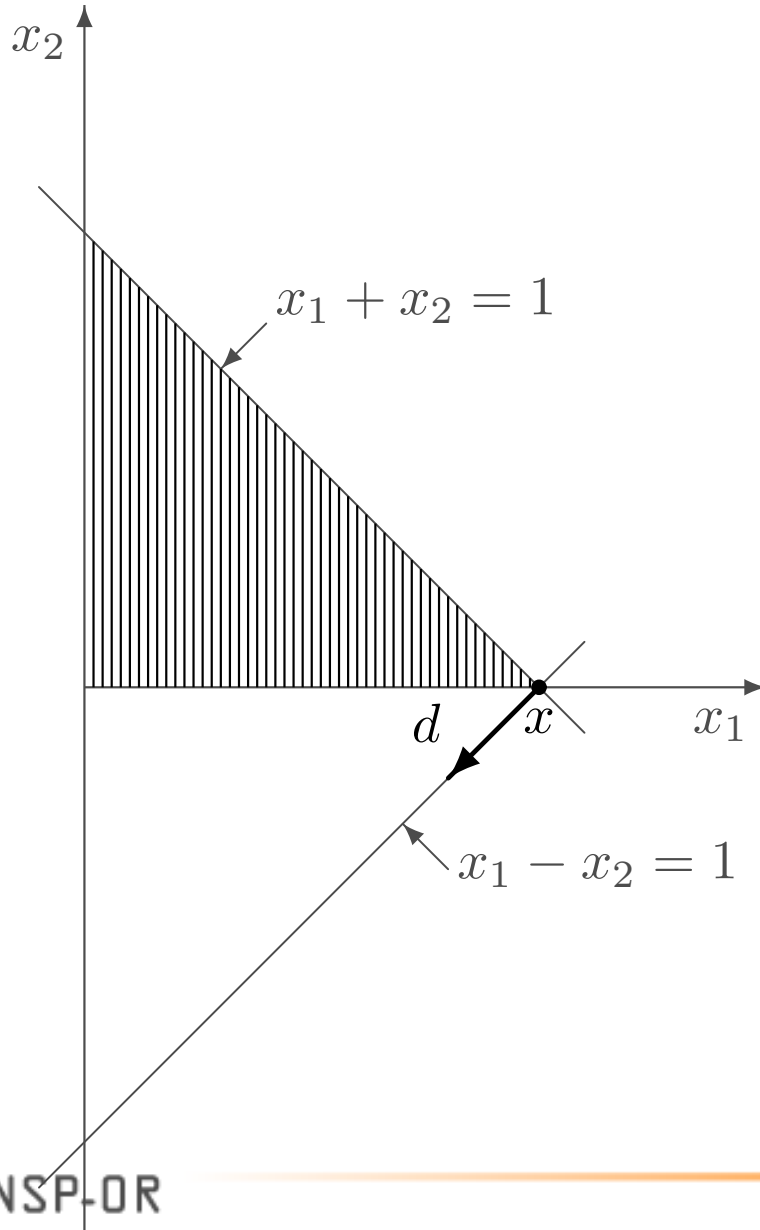
- La solution

$$x + \alpha d = \begin{pmatrix} 1 - \alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'est admissible pour aucun $\alpha > 0$.

- La direction de base n'est pas admissible.
- La solution de base admissible est dégénérée.

Exemple



$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Direction de descente

- Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ une solution de base admissible
- Soit $d_j = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$ la direction de base admissible correspondant à la variable hors-base j
- Quelle est la pente de la fonction en x dans la direction d_j ?

$$\nabla f(x)^T d_j = c^T d_j = c_B^T d_B + c_N^T d_N = -c_B^T B^{-1} A_j + c_j$$

- Cette quantité est appelée *coût réduit*

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Direction de descente

- Si le coût réduit \bar{c}_j est négatif, alors la j ème direction de base est une direction de descente.
- Si tous les coûts réduits sont positifs, il n'existe pas de direction de descente, et x est la solution optimale du problème.
- Conditions d'optimalité

Conditions d'optimalité

Conditions nécessaires Soit un problème d'optimisation linéaire, et x^* une solution de base non dégénérée du polytope des contraintes. Si x^* est solution optimale du problème, alors $\bar{c} \geq 0$.

(p. 180)

Conditions suffisantes Soit un problème d'optimisation linéaire, et x^* une solution de base admissible du polytope des contraintes. Si $\bar{c} \geq 0$, alors x^* est optimal.

(p. 181)

Algorithme du simplexe

Idée :

- Partir d'une solution de base admissible.
- Si tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, on a trouvé la solution.
- Sinon, choisir une direction de base correspondant à un coût réduit négatif (direction de descente).
- Avancer le long de cette direction (calcul du pas) pour atteindre un autre sommet.

Calcul du pas

- Soit x une solution de base admissible
- Soit d_j une direction de base correspondant à un coût réduit négatif (direction de descente).
- Avancer d'un pas α le plus grand possible tel que

$$x^+ = x + \alpha d_j \geq 0$$

- Exemple :

$$x^+ = x + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \\ 0 \\ 2 - 2\alpha \end{pmatrix} \geq 0 \text{ si } \alpha \leq 1.$$

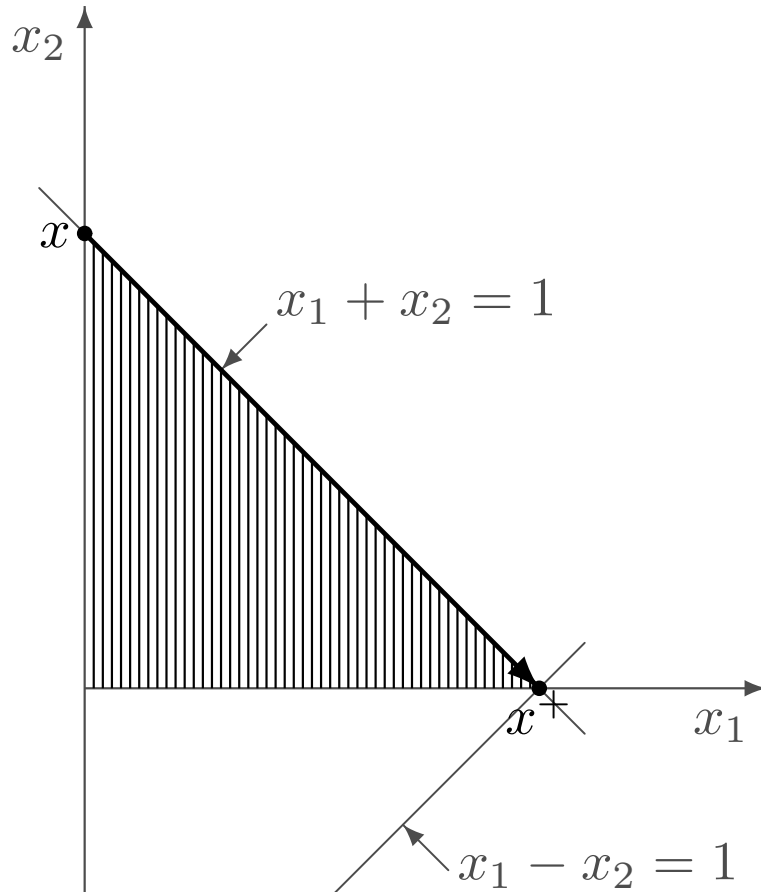
- Choisir $\alpha = 1$

Calcul du pas

$$x^+ = x + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \\ 0 \\ 2 - 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Forcément, une variable en base va prendre la valeur 0.
- Cette variable sort de la base en x^+ .
- La variable hors-base correspondant à la direction de base prend sa place.
- Une itération correspond donc à un échange de variables dans la base.

Calcul du pas



Calcul du pas

$$x + \theta d \geq 0$$

- Seules les composantes k telles que $(d)_k < 0$ risquent de poser problème.
- Celles-ci correspondent forcément à des variables en base.
- S'il n'y en a pas, le problème est non borné.
- Calculer pour chacune d'elles la distance à la contrainte :

$$-\frac{(x_k)_i}{(d_j)_i}$$

- et choisir la plus petite valeur

$$\theta = \begin{cases} -\frac{(x_k)_i}{(d_j)_i} & \text{si } (d_j)_i < 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Algorithme du simplexe

Objectif

Trouver le minimum global d'un problème linéaire en forme standard

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$Ax = b \quad x \geq 0.$$

Entrées

- La matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- Le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$;
- Le vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$.
- $J^0 = (j_1^0, \dots, j_m^0)$ l'ensemble des indices des variables de base correspondant à une solution de base admissible.

Algorithme du simplexe

Sorties

- Un indicateur booléen U identifiant un problème non borné;
- Si U est faux, $J^* = (j_1^*, \dots, j_m^*)$ l'ensemble des indices des variables de base correspondant à une solution de base admissible optimale, en cas d'existence de celle-ci.

Initialisation

$$k = 0.$$

Algorithme du simplexe

Itérations

1. Soit $B = (A_{j_1^k}, \dots, A_{j_m^k})$ la matrice formée par les colonnes de A correspondant aux indices de J_k .
2. Identifier l'indice $j \notin J^k$ le plus petit (règle de Bland) tel que le coût réduit associé

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$$

soit strictement négatif (A_j est la j ème colonne de A). S'il n'en existe pas, la solution courante est optimale. $J^* = J^k$, $U = \text{FAUX}$. STOP.

3. Soit P la matrice de permutation telle que

$$AP = (B|N).$$

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

4. Calculer

$$x_k = P \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}.$$

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

5. Calculer la j ième direction de base

$$d_j = P \begin{pmatrix} d_{B_j} \\ d_{N_j} \end{pmatrix}$$

avec $d_{B_j} = -B^{-1}A_j$, et d_{N_j} est tel que

$$P^T e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{N_j} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

c'est-à-dire que tous les éléments de d_{N_j} sont nuls, sauf celui correspondant à la variable j qui vaut 1.

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

6. Pour chaque indice, calculer la distance à la contrainte $x_i \geq 0$, c'est-à-dire

$$\lambda_i = \begin{cases} -\frac{(x_k)_i}{(d_j)_i} & \text{si } (d_j)_i < 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

7. Soit ℓ le plus petit indice (règle de Bland) tel que

$$\lambda_\ell = \min_i \lambda_i.$$

8. Si $\lambda_\ell = +\infty$, le problème est non borné, et aucune solution n'existe. $U=\text{VRAI}$. STOP.

- L'indice j intègre la base, et l'indice ℓ la quitte, i.e.

$$J^{k+1} = J^k \cup \{j\} \setminus \ell, \quad k = k + 1.$$

Tableau du simplexe

L'algorithme exige des calculs importants en algèbre linéaire, impliquant la matrice B^{-1} :

- Pas 2: le calcul des coûts réduits $c^T - c_B^T B^{-1} A$;
- Pas 4: le calcul de l'itéré courant $B^{-1} b$;
- Pas 5: le calcul de la direction $-B^{-1} A_j$.

Idée :

- regrouper toutes les quantités importantes dans un tableau,
- utiliser le tableau pour effectuer les calculs lors d'une itération,
- mettre à jour le tableau pour qu'il garde ses propriétés.

Tableau du simplexe

Soit un problème linéaire en forme standard $\min c^T x$ sous contraintes $Ax = b$, $x \geq 0$, et soit une matrice de base B correspondant à une solution de base admissible \tilde{x} . Le tableau

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c_B^T B^{-1}A$	$-c_B^T B^{-1}b$

est appelé le *tableau du simplexe* correspondant à cette solution de base admissible. D'une manière plus détaillée, nous avons

			\tilde{x}_{j_1}
$B^{-1}A_1$	\cdots	$B^{-1}A_n$	\vdots
			\tilde{x}_{j_m}
\bar{c}_1	\cdots	\bar{c}_n	$-c^T \tilde{x}$

(4)

où \bar{c}_i est le coût réduit de la variable i .

Tableau du simplexe

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Variables en base : 2 et 4

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	1	0	1
2	0	1	1	2
1	0	2	0	2

x_2
 x_4
 $-c^T x$

Variables en base

- Colonne partie gauche = variable du problème.
- Colonnes des variables en base forment la matrice identité.
- Ligne partie supérieure = variable en base.
- Dernière colonne, partie supérieure : valeur des variables en base.
- Les autres variables sont toujours nulles.

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	1	0	1	x_2
2	0	1	1	2	x_4
1	0	2	0	2	$-c^T x$

Variables en base

- Dernier élément de la dernière colonne : fonction objectif, **changée de signe.**

$$-c^T x = -c_B^T x_B - c_N^T x_N = -c_B^T B^{-1} b - 0.$$

Tableau du simplexe

- Les quantités nécessaires à l'algorithme sont lues directement dans le tableau
- Appliquons une itération de l'algorithme en utilisant le tableau.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Variables en base : 4, 5, 6

$$B = B^{-1} = I, \quad c_B = 0.$$

Le tableau se simplifie.

Exemple

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1}b \\ \hline c^T - c_B^T B^{-1}A & -c_B^T B^{-1}b \\ \hline \end{array}
 \text{ devient }
 \begin{array}{|c|c|} \hline A & b \\ \hline c^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

Exemple

Choix de la variable hors-base à introduire dans la base : coûts réduits négatifs

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

- Règle de Bland : prendre celui le plus à gauche : variable 1

Exemple

Direction de base : $d_B = -B^{-1}A_1$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$$d_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Pas maximum : $-x_i/d_i = x_i/(-d_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$\lambda_4 = 20$

Exemple

Pas maximum : $-x_i/d_i = x_i/(-d_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$\lambda_4 = 20$
 $\lambda_5 = 10$

Exemple

Pas maximum : $-x_i/d_i = x_i/(-d_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	$\lambda_4 = 20$
2	1	2	0	1	0	20	$\lambda_5 = 10$
2	2	1	0	0	1	20	$\lambda_6 = 10$
-10	-12	-12	0	0	0	0	

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	$\lambda_4 = 20$
2	1	2	0	1	0	20	$\lambda_5 = 10$
2	2	1	0	0	1	20	$\lambda_6 = 10$
-10	-12	-12	0	0	0	0	

- Valeur minimale : 10
- Atteinte pour x_5 et x_6 .
- Règle de Bland : choisir le plus petit indice
- Ainsi, lors de cette itération :
 - x_1 rentre dans la base
 - x_5 en sort
- Variables en base : 1,4,6.
- Comment construire le tableau pour cette nouvelle base ?

Changement de base

Vocabulaire :

- **Colonne du pivot** : colonne correspondant à la variable hors-base qui va rentrer dans la base
- **Ligne du pivot** : ligne correspondant à la variable en base qui va sortir de la base
- **Pivot** : élément du tableau sur la ligne et la colonne du pivot.

Changement de base

- Soit la matrice de base B au début de l'itération
- Lors de l'itération, la variable j entre dans la base, et la variable k en sort.
- La nouvelle matrice de base \bar{B} est identique à B , sauf pour la colonne k qui est remplacée par la colonne j .
- Le tableau au début de l'itération implique B^{-1} .
- Le tableau à la fin début de l'itération implique \bar{B}^{-1} .
- Question : quelles transformations faut-il appliquer à B^{-1} pour obtenir \bar{B}^{-1} ?
- Définir une matrice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telle que

$$QB^{-1} = \bar{B}^{-1}, \text{ ou encore } QB^{-1}\bar{B} = I.$$

- Quelles transformations faut-il appliquer à $B^{-1}\bar{B}$ pour obtenir la matrice identité ?

Changement de base

$B^{-1}\bar{B}$ est déjà “presque” la matrice identité

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & u_1 & & 0 \\ 0 & 1 & & u_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_\ell & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & u_m & & 1 \end{pmatrix},$$

avec $u = -d_j = B^{-1}A_j$.

Opérations élémentaires de ligne

Opération élémentaire de ligne

Soit une matrice A . Une opération élémentaire de ligne sur A consiste à multiplier par une constante β une ligne j de A , et l'ajouter à la ligne i

$$a_i = a_i + \beta a_j.$$

Cette opération revient à pré-multiplier A par la matrice Q_{ij} qui est la matrice identité (dimension ligne de A) dont l'élément (i, j) est remplacé par β .

Exemple avec $i = 2, j = 1, \beta = 4$. $\bar{A} = Q_{ij}A$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 12 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Changement de base

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & u_1 & & 0 \\ 0 & 1 & & u_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_\ell & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & u_m & & 1 \end{pmatrix},$$

- Pour toute ligne $i \neq \ell$, on ajoute la ligne ℓ multipliée par $-u_i/u_\ell$ à la i ème ligne.
- Noter que $u_\ell = -(d_j)_\ell$ est non nul.
- La ligne ℓ est divisée par u_ℓ .

Changement de base

Dans le tableau :

- considérer la colonne du pivot,
- après l'itération, elle correspondra à une variable en base,
- elle doit donc être transformée en une colonne de la matrice identité.

Pivotage du tableau

$T =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	1.5	1	1	-0.5	0	10	x_4
1	0.5	1	0	0.5	0	10	x_1
0	1	-1	0	-1	1	0	x_6
0	-7	-2	0	5	0	100	

Variables en base

$\bar{T} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	2.5	1	1	-1.5	10	x_4
1	0	1.5	0	1	-0.5	10	x_1
0	1	-1	0	-1	1	0	x_2
0	0	-9	0	-2	7	100	

Variables en base

Pivotage du tableau

Objectif

Mettre à jour le tableau du simplexe lors d'une itération de la méthode du simplexe.

Entrées

- Le tableau du simplexe T ;
- L'indice ℓ de la ligne du pivot, c'est-à-dire la ligne correspondant à la variable en base qui va en sortir;
- L'indice j de la colonne du pivot, c'est-à-dire la colonne correspondant à la variable hors base qui va intégrer la base.

Sortie

Le tableau du simplexe \bar{T} correspondant à la nouvelle base.

Initialisation

$p = T(\ell, j)$. Si $p = 0$, STOP. Impossible de pivoter.

Pivotage du tableau

Itérations

Pour tout $i = 1, \dots, m + 1, i \neq \ell,$

$$T(i, k) = T(i, k) - \frac{T(i, j)}{p} T(\ell, k) \quad k = 1, \dots, n + 1.$$

Ensuite

$$T(\ell, k) = \frac{T(\ell, k)}{p} \quad k = 1, \dots, n + 1.$$

Algorithme du simplexe

Objectif

Trouver le minimum global d'un problème linéaire en forme standard.

Entrée

T_0 , le tableau du simplexe correspondant à une solution de base admissible.

Sorties

- Un indicateur booléen U identifiant un problème non borné;
- Si U est faux, T^* , le tableau du simplexe correspondant à une solution de base admissible optimale.

Initialisation

$k = 0$.

Algorithme du simplexe

Itérations

1. Examiner les coûts réduits dans la dernière ligne de T_k .
S'ils sont tous positifs, alors le tableau est optimal. $T^* = T_k$,
 $U=FAUX$. STOP.
2. Soit j l'indice de la colonne correspondant au coût réduit négatif le plus à gauche dans le tableau.
3. Pour chaque i , calculer la distance à la contrainte $x_i \geq 0$,
c'est-à-dire

$$\lambda_i = \begin{cases} T(i, n + 1)/T(i, j) & \text{si } T(i, j) > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Algorithme du simplexe

Itérations (suite)

4. Soit ℓ le plus petit indice tel que

$$\lambda_\ell = \min_i \lambda_i.$$

5. Si $\lambda_\ell = +\infty$, le problème est non borné, et aucune solution n'existe. $U=VRAI$. STOP.
6. L'indice j intègre la base, et l'indice ℓ la quitte. Appliquer le pivotage au tableau T_k pour obtenir T_{k+1} . $k = k + 1$.

Exemple

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6

1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$$\lambda_4 = 20$$

$$\lambda_5 = 10$$

$$\lambda_6 = 10$$

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6

0	1.5	1	1	-0.5	0	10
1	0.5	1	0	0.5	0	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	-7	-2	0	5	0	100

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1.5	1	1	-0.5	0	10
1	0.5	1	0	0.5	0	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	-7	-2	0	5	0	100

$$\lambda_4 = 20/3$$

$$\lambda_1 = 20$$

$$\lambda_6 = 0$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	2.5	1	1	-1.5	10
1	0	1.5	0	1	-0.5	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	0	-9	0	-2	7	100

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	2.5	1	1	-1.5	10	$\lambda_4 = 4$
1	0	1.5	0	1	-0.5	10	$\lambda_1 = 20/3$
0	1	-1	0	-1	1	0	$\lambda_2 = +\infty$
0	0	-9	0	-2	7	100	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	1	0.4	0.4	-0.6	4	x_3
1	0	0	-0.6	0.4	0.4	4	x_1
0	1	0	0.4	-0.6	0.4	4	x_2
0	0	0	3.6	1.6	1.6	136	

Solution optimale : $x^* = (4, 4, 4, 0, 0, 0)^T$, $c^T x^* = -136$.

Notes

- Bases dégénérées : risque de cycler
- Règle de Bland : garantie de ne jamais cycler, même avec des bases dégénérées.

Tableau initial

Comment identifier le tableau initial ?

- Cas simple : problème en forme canonique, avec $b \geq 0$.
- Cas difficile : problème général en forme standard.

Tableau initial

Soit le problème en forme canonique

$$\min c^T x$$

sous contrainte

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

avec $b \geq 0$.

Idée :

- On introduit les variables d'écart pour obtenir la forme standard.
- On inclut les variables d'écart dans la base initiale.
- La matrice de base associée est la matrice identité.
- La formulation du tableau se simplifie.

Tableau initial

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1}b \\ \hline c^T - c_B^T B^{-1}A & -c_B^T B^{-1}b \\ \hline \end{array} \text{ devient } \begin{array}{|c|c|} \hline A & b \\ \hline c^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

Attention : admissible si et seulement si $b \geq 0$

- Il s'agit de la technique utilisée lors de l'exemple précédent.
- Elle n'est malheureusement pas suffisamment générale.
- Si tous les problèmes d'optimisation linéaires peuvent toujours s'écrire en forme canonique,
- ... tous ne vérifient pas $b \geq 0$.

Tableau initial

Problème en forme standard :

$$\min c^T x$$

sous contrainte

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Supposons (sans perte de généralité) que $b \geq 0$.

Idée :

- Résoudre un problème auxiliaire :
 - qui soit lié au problème initial,
 - pour lequel il est simple d'identifier un tableau initial.
- On introduit une variable auxiliaire par contrainte: y_1, \dots, y_m
- On remplace la fonction de coût.

Problème auxiliaire

$$\min y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 0^T x + e^T y$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

- Solution de base admissible : $x = 0, y = b, B = I$.
- Tableau initial :

A	b
$-\tilde{c}_B^T A 0$	$-\tilde{c}_B^T b$

avec $\tilde{c}_B^T = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)$

- dernière ligne = somme des éléments de la colonne correspondante, **changée de signe**.
- On peut résoudre ce problème avec l'algorithme du simplexe.

Problème auxiliaire

Appelons

- P1 le problème original en forme standard
- P2 le problème auxiliaire.
- Soit x_0 une solution **admissible** de P1
- Donc, $Ax_0 = b$ et $x_0 \geq 0$.
- La solution $x = x_0, y = 0$ est donc aussi admissible pour P2.

$$Ax + y = Ax_0 = b.$$

- La fonction objectif de P2 à cette solution = $\sum_i y_i = 0$.
- Il est impossible de trouver une meilleure valeur, car la fonction objectif de P2 ne peut être négative.
- Donc $x = x_0, y = 0$ est solution optimale de P2.

Problème auxiliaire

Conclusion :

- Si P1 possède une solution admissible,
- alors le coût optimal de P2 est 0.

Contraposée :

- Si le coût optimal de P2 est strictement positif,
- alors P1 ne possède pas de solution admissible.

Et donc :

- Si (x^*, y^*) est solution optimale de P2,
- si le coût optimal associé est 0,
- alors, $y^* = 0$
- et $Ax^* + y^* = Ax^* = b$, et x^* est admissible pour P1.

Exemple

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\-x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\4x_2 + 9x_3 &= 5 \\3x_3 + x_4 &= 1 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.\end{aligned}$$

Exemple

Problème auxiliaire :

$$\min y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & y_1 & & & & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & & + & y_2 & & = & 2 \\ & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & & & & & + & y_3 & = & 5 \\ & & & & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & + & y_4 & = & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	2	3	0	1	0	0	0	3	3/2
-1	2	6	0	0	1	0	0	2	1
0	4	9	0	0	0	1	0	5	5/4
0	0	3	1	0	0	0	1	1	$+\infty$
0	-8	-21	-1	0	0	0	0	-11	

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
2	0	-3	0	1	-1	0	0	1	1/2
-1/2	1	3	0	0	1/2	0	0	1	$+\infty$
2	0	-3	0	0	-2	1	0	1	1/2
0	0	3	1	0	0	0	1	1	$+\infty$
-4	0	3	-1	0	4	0	0	-3	

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
2	0	-3	0	1	-1	0	0	1	1/2
-1/2	1	3	0	0	1/2	0	0	1	$+\infty$
2	0	-3	0	0	-2	1	0	1	1/2
0	0	3	1	0	0	0	1	1	$+\infty$
-4	0	3	-1	0	4	0	0	-3	

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	0	1/2	$+\infty$
0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	0	5/4	5/9
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	$+\infty$
0	0	3	1	0	0	0	1	1	1/3
0	0	-3	-1	2	2	0	0	-1	

Exemple

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	0	1/2	$+\infty$
0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	0	5/4	5/9
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	$+\infty$
0	0	3	1	0	0	0	1	1	1/3
0	0	-3	-1	2	2	0	0	-1	

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1	x_1
0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2	x_2
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	y_3
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	x_3
0	0	0	0	2	2	0	1	0	

Variables en base

Exemple

- Solution optimale du problème auxiliaire :

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Le coût optimal et les variables auxiliaires sont nulles.
- Le vecteur x^* est admissible pour le problème de départ.
- Utilisons le tableau final du problème P2 pour construire le tableau initial du problème P2.
- Mais il y a une variable auxiliaire en base.

Préparation du tableau

- Comme $y^* = 0$, si une variable auxiliaire est en base, la base est dégénérée.
- On peut donc échanger cette variable avec une variable x sans modifier la solution.
 - Supposons que la k ième variable de base soit auxiliaire.
 - Examinons la k ième ligne du tableau.
 - Choisir l'élément en colonne j de cette ligne tel que
 - j soit l'indice d'une variable du problème original
 - l'élément soit non nul.
 - k sort de base. j rentre en base
 - Pivotage du tableau

Préparation du tableau

Mais... cela ne fonctionne pas toujours :

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1	x_1
0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2	x_2
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	y_3
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	x_3
0	0	0	0	2	2	0	1	0	

- Cela signifie que la matrice A n'est pas de rang plein.
- La ligne en question correspond à une contrainte redondante.
- Elle peut être supprimée.

Préparation du tableau

On élimine les variables auxiliaires de la base

- soit en pivotant
- soit en supprimant les contraintes redondantes.

Pour l'exemple, on obtient

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	0	1/2	1	x_1
0	1	0	-3/4	1/2	x_2
0	0	1	1/3	1/3	x_3
-	-	-	-	-	

- Il restera à calculer les coût réduits.

Illustration des deux phases

$$\min_{x \in \mathbb{R}^5} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & 3x_2 & & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & = & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0. \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Problème auxiliaire

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	2
1	2	0	-3	1	0	1	0	2	2
-1	-4	3	0	0	0	0	1	1	
-1	-1	-3	-1	-2	0	0	0	-5	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0	
0	-1	3	4	1	1	0	1	3	1
0	2	-3	3	-1	1	0	0	-3	

Problème auxiliaire

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	
1	3	0	4	1	1	0	0	2
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0
0	-1	3	4	1	1	0	1	3
0	2	-3	3	-1	1	0	0	-3

1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	
1	3	0	4	1	1	0	0	2
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0
0	-1/3	1	4/3	1/3	1/3	0	1/3	1
0	1	0	7	0	2	0	1	0

x_1

y_2

x_3

Problème auxiliaire

- Le coût optimal est nul.
- Solution de base admissible: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.
- La variable y_2 est en base. Elle est échangée avec x_2 .

Préparation du tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	
1	3	0	4	1	1	0	0	2
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0
0	-1/3	1	4/3	1/3	1/3	0	1/3	1
0	1	0	7	0	2	0	1	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	
1	0	0	-17	1	-2	3	0	2
0	1	0	7	0	1	-1	0	0
0	0	1	3.67	1/3	2/3	-1/3	1/3	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0

Préparation du tableau

Supprimer les colonnes correspondant aux variables auxiliaires

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

1	0	0	-17	1	2
0	1	0	7	0	0
0	0	1	3.67	1/3	1
0	0	0	0	0	0

Calcul de la dernière ligne :

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

$c =$

2	3	3	1	-2	
1	0	0	-17	1	2
0	1	0	7	0	0
0	0	1	3.67	1/3	1
0	0	0	3	-5	-7

Deuxième phase

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	0	-17	1	2	2
0	1	0	7	0	0	
0	0	1	3.67	1/3	1	3
0	0	0	3	-5	-7	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	0	-17	1	2	
0	1	0	7	0	0	0
-1/3	0	1	9.33	0	1/3	0.04
5	0	0	-82	0	3	

Deuxième phase

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	-17	1	2
0	1	0	7	0	0
-1/3	0	1	9.33	0	1/3
5	0	0	-82	0	3

0
0.04

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2.43	0	0	1	2
0	0.14	0	1	0	0
-1/3	-1.33	1	0	0	1/3
5	11.71	0	0	0	3

x_5
 x_4
 x_3

Solution optimale : $x^* = (0, 0, 1/3, 0, 2)$, $c^T x^* = -3$.

Algorithme complet du simplexe

Objectif

Trouver le minimum global d'un problème linéaire en forme standard.

Entrées

- La matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- Le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$;
- Le vecteur de coût $c \in \mathbb{R}^n$.

Sorties

- Un indicateur booléen U identifiant un problème non borné;
- Un indicateur booléen F identifiant un problème non admissible;
- Si U et F sont faux, T^* , le tableau du simplexe correspondant à une solution de base admissible optimale.

Algorithme complet du simplexe

Phase I

1. En multipliant certaines contraintes par -1, modifier le problème pour que $b \geq 0$.
2. Introduire les variables auxiliaires y_1, \dots, y_m , et définir

$$T_0 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & \cdots & x_n & y_1 & \cdots & y_m \\ \hline & A & & & I & & b \\ \hline & -e^T A & & & 0 & & -e^T b \end{array}$$

où e est le vecteur de \mathbb{R}^m dont toutes les composantes valent 1.

3. Résoudre le problème auxiliaire en utilisant l'algorithme du simplexe pour obtenir U_0 et T_0^* .
4. Si $U_0 = \text{VRAI}$ ou si le coût optimal du problème auxiliaire est non nul, alors $F = \text{VRAI}$. STOP. Sinon, $F = \text{FAUX}$.

Algorithme complet du simplexe

Phase I (suite)

5. Pour chaque variable auxiliaire en base:
 1. Pivoter le tableau pour l'échanger avec une variable originale.
 2. Si tous les pivots potentiels sont nuls, supprimer la ligne correspondant à cette variable en base. La contrainte associée est redondante.
6. Lorsque qu'il n'y a plus de variables auxiliaires en base, supprimer les colonnes du tableau correspondantes pour obtenir le tableau \bar{T}_0^*

Algorithme complet du simplexe

Phase II

1. Calculer la dernière ligne de \bar{T}_0^* .

$$\bar{T}_0^*(m+1, j) = \begin{cases} c_j - c_B^T B^{-1} A_j & \text{si } j \text{ hors base} \\ 0 & \text{si } j \text{ en base} \\ -c_B^T B^{-1} b & \text{si } j=n+1. \end{cases}$$

2. Résoudre le problème en utilisant l'algorithme du simplexe pour obtenir U et T^* .