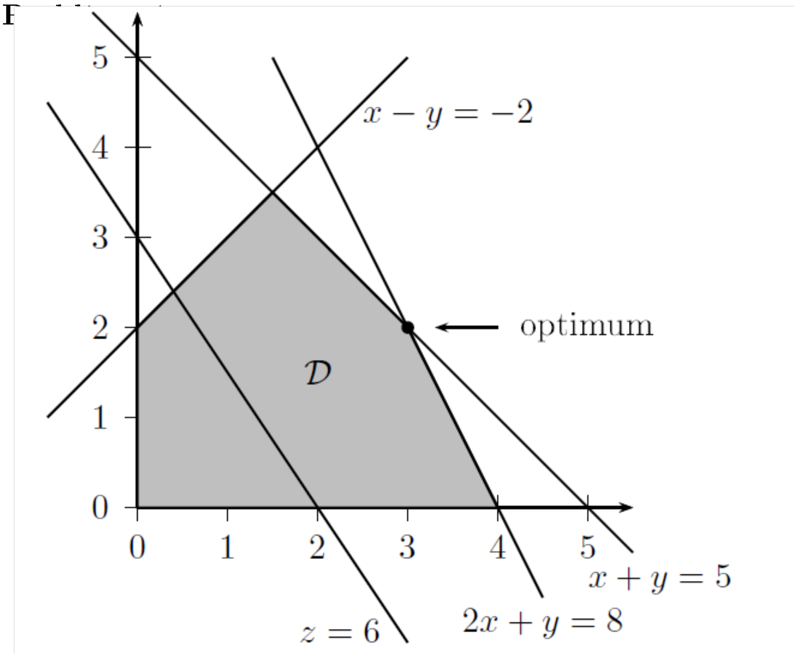
EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

Introduction à l'optimisation différentiable

Automne 2013

Corrigé 4

a) 

Les sommets ou points extrêmes de $\mathcal{D}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) On détermine la solution optimale graphiquement, en représentant les lignes de niveau de z. L'optimum est atteint en $(3, 2)$ et a une valeur égale à -13.

c) Le programme linéaire sous forme canonique s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{llrcrcl}
\min & z = & -3x & - & 2y & & \\
\text{s.c.} & & -x & + & y & \leq & 2 \\
& & 2x & + & y & \leq & 8 \\
& & x & + & y & \leq & 5 \\
& & & & x & \geq & 0 \\
& & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

Mettons-le sous forme standard :

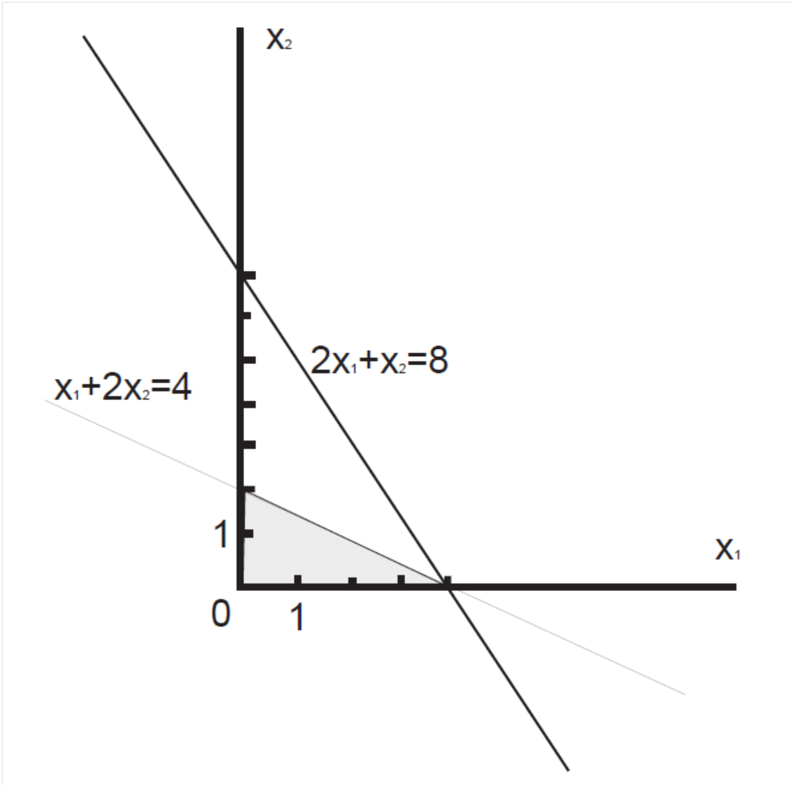
$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\min & z = & -3x & - & 2y & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & -x & + & y & + & a & & & & & = & 2 \\
& & 2x & + & y & & & + & b & & & = & 8 \\
& & x & + & y & & & & & + & c & = & 5 \\
& & x & , & y & , & a & , & b & , & c & \geq & 0
\end{array}$$

Problème 2

a) On introduit les variables d'écart x_3 et x_4 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} \min z & = & x_1 & + & x_2 & & & & & \\ s.c. & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

b)



c) Base (x_1, x_4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Direction correspondant à x_2 :

$$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ -\frac{x_4}{d_4} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 0$$

Direction correspondant à x_3 :

$$d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ d_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 8$$

d) Base (x_2, x_3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

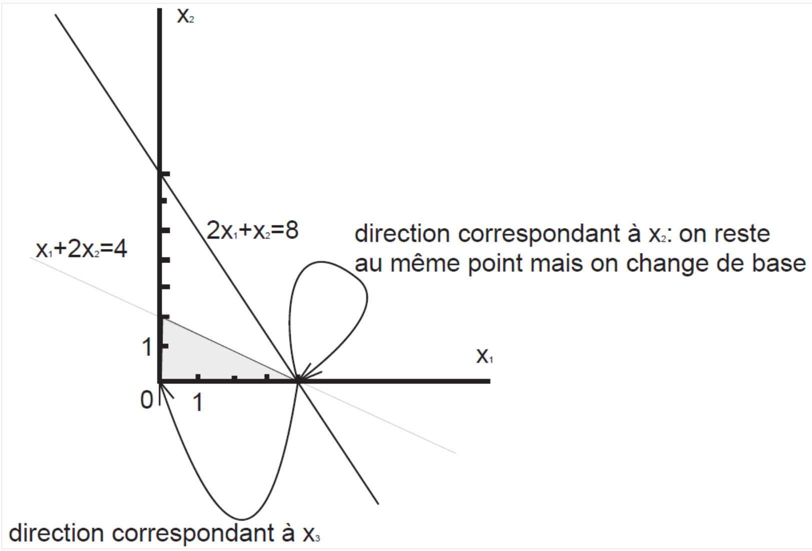
Direction correspondant à x_1 :

$$d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ -\frac{x_3}{d_3} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

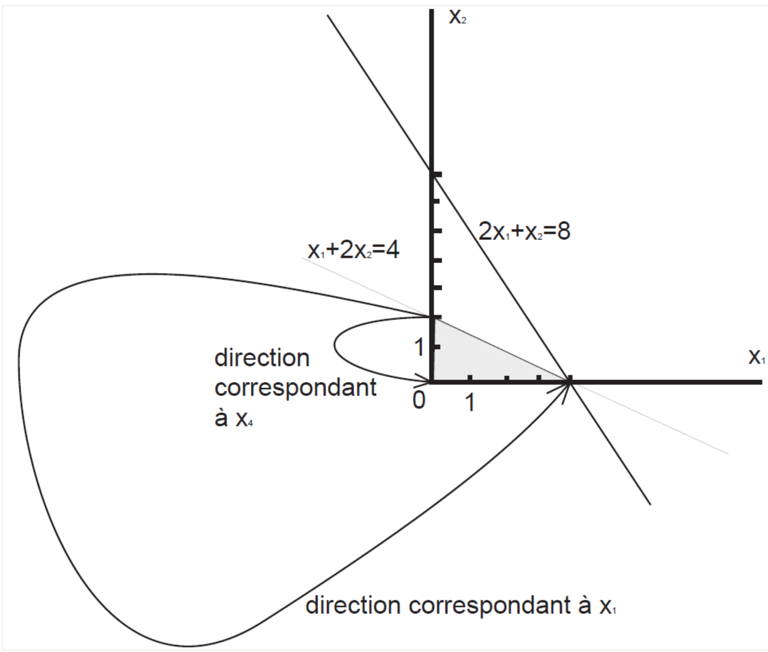
Direction correspondant à x_4 :

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ d_3 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

e)



f)



Problème 3

a) Si les indices de base sont 1,2, et 3, la matrice de base est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dont l'inverse s'écrit :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur b étant $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, les variables de base valent $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ La variable hors-base x_4 vaut par définition 0.
Cette solution est admissible.

b) Calculons le coût réduit pour la variable x_4 :

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 1 > 0$$

La variable x_4 ne réduit pas le coût. La solution de base d'indices 1,2 et 3 correspond donc a l'optimum du problème.

Problème 4

a) On introduit les variables d'écart x_3, x_4 et x_5 :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\min & z = & -3x_1 & - & 4x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 50 \\
 & & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 20 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 30 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

b) On obtient le tableau initial suivant :

$T_0 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		θ	
	1	2	1	0	0	50	50	
	1	0	0	1	0	20	20	←
	0	1	0	0	1	30		
	-3	-4	0	0	0	0		
	↑							

Les variables en base sont x_3, x_4 et x_5. Le point extrême visité est $(0, 0)$.

$T_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		θ	
	0	**2**	1	-1	0	30	15	←
	1	0	0	1	0	20		
	0	1	0	0	1	30	30	
	0	-4	0	3	0	60		
		↑						

Les variables en base sont x_3, x_1 et x_5. Le point extrême visité est $(20, 0)$.

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$T_2 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	1/2	-1/2	0	15
1	0	0	1	0	20
0	0	-1/2	1/2	1	15
0	0	2	1	0	120

Les variables en base sont x_2, x_1 et x_5. Le point extrême visité est $(20, 15)$.

$$x^+ = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Tous les coûts réduits étant positifs, ce tableau est optimal. La solution optimale est $x_1^* = 20$ et $x_2^* = 15$, pour une valeur de la fonction objectif de $z^* = -120$.

Problème 5

a) La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

et toute base de cette matrice est formée d'une des quatre premières colonnes et de la cinquième. Les quatre bases et les solutions de basee associées sont donc

1. $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$
2. $\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$
3. $\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$
4. $\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}^T$

Toutes ces solutions de base ne sont pas admissibles pour le système.

b) Pour une matrice 2×5, le nombre maximal de bases est $\binom{5}{2}$, c'est-à-dire 10.

Problème 6

a) On note

x_1, x_2 et x_3 les milliers de francs qui seront légués respectivement à André, Blaise et Claude ;
d_1, d_2 et d_3 les pourcentages des dépenses respectives d'André, Blaise et Claude ;
r_1, r_2 et r_3 les intérêts des investissements respectifs d'André, Blaise et Claude.

On a donc

	André	Blaise	Claude
d	2/5	3/10	1/5
r	1/6	3/7	0

Pour chaque petit-neveu, on a les relations suivantes :

argent dépensé en une année	:	$d_i \cdot x_i$
argent restant le 31 décembre	:	$x_i - d_i \cdot x_i$
intérêt reçu	:	$(x_i - d_i \cdot x_i) \cdot r_i$
argent après calcul de l'intérêt	:	$(x_i - d_i \cdot x_i) \cdot (1 + r_i)$

Grâce à ces relations on peut écrire le programme linéaire que le notaire doit résoudre.

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Max} & y = & (1-d_1)(1+r_1)x_1 & + & (1-d_2)(1+r_2)x_2 & + & (1-d_3)(1+r_3)x_3 & & \\
\text{s.c.} & & d_1x_1 & & & & & \leq & 10 \\
 & & & & d_2x_2 & & & \leq & 10 \\
 & & & & & & d_3x_3 & \leq & 10 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sous forme canonique et avec les valeurs numériques le programme linéaire sécrit

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Min} & z = & -7/10x_1 & - & x_2 & - & 4/5x_3 & & \\
\text{s.c.} & & 2/5x_1 & & & & & \leq & 10 \\
 & & & & 3/10x_2 & & & \leq & 10 \\
 & & & & & & 1/5x_3 & \leq & 10 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sous forme standard ce programme linéaire sécrit

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\text{Min} & z = & -7/10x_1 & - & x_2 & - & 4/5x_3 & & & & & \\
\text{s.c.} & & 2/5x_1 & & & & & + & x_4 & = & 10 & \\
 & & & & 3/10x_2 & & & + & x_5 & = & 10 & \\
 & & & & & & 1/5x_3 & + & x_6 & = & 10 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_7 & = & 100 & \\
 & & & & & & & & x_i & \geq & 0 & i \in \{1, ..., 7\}
\end{array}
$$

b) Après l'application de l'algorithme du simplexe, on trouve $x_1 = 50/3$, $x_2 = 100/3$ et $x_3 = 50$ avec $z = -85$.

En conséquence, le grand-oncle doit donner

$\sim$ 16'666 Frs à André,

$\sim$ 33'333 Frs à Blaise et

50'000 Frs à Claude.

Il va donc leur léguer $\sim$ 100'000 Frs et, à la fin de l'année, il leur restera 85'000 Frs.