EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

Introduction à l'optimisation différentiable

Automne 2013/2014

Serie 2

Problème 1

Soit la fonction $f(\boldsymbol{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ et les points $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ et $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$.
a) Calculer $f(\boldsymbol{a})$, $f(\boldsymbol{b})$, $\nabla f(\boldsymbol{a})$ et $\nabla f(\boldsymbol{b})$.
b) Discuter les conditions d'optimalité en $\boldsymbol{a}$ et en $\boldsymbol{b}$ sur la base des résultats obtenus en a).
c) La direction $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ est-elle une direction de descente en $\boldsymbol{b}$? Justifier.

Problème 2

Pour les deux fonctions ci-dessous, déterminer tous les points stationnaires et, pour chacun d'eux, déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. Justifier en utilisant les conditions d'optimalité.
(a) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$
(b) $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2 - x_1^2$

Problème 3

Déterminer le parallélépipède de volume unité et de surface minimale.

Indication : Formuler sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire et utiliser ensuite les conditions suffisantes d'optimalité.

Problème 4

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout couple de points (x, y) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$.
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est concave si et seulement si pour tout couple de points (x, y) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$.
Une fonction affine, encore appelée linéaire, est à la fois convexe et concave.

Indiquer si la fonction suivante est convexe ou concave. Justifier votre réponse
– $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = 1 - x^2$

Problème 5

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x$$

$$\text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = (1\ 1\ 1)^T$$

(a) Trouver l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.
(b) Calculer la direction de la plus forte descente au point $x^0 = (0\ 0\ 0)^T$

Problème 6

Considérer la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$$

- Est-ce que $x_0 = (0,0)^T$ est un minimum local de la fonction f ? Justifier.
- Si oui, est-ce aussi un minimum global ? Si non, trouver une direction de descente pour f en x_0.

Problème 7

Soit la fonction

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$$

et les points

$$(x, y) = \{\ (2, 2),\ (-1, 1),\ (0, -1)\ \}$$

1. Ces points sont-ils des minimums locaux ?
2. Appliquer deux itérations de la méthode de Newton locale à chacun de ces points.

Problème 8

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Montrer que, indépendamment du point de départ, la méthode de Newton locale appliquée à cette fonction converge en une seule itération.