Algorithme du plus court chemin

Michel Bierlaire

michel.bierlaire@epfl.ch

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le plus court chemin

- Le problème du plus court chemin consiste à déterminer le chemin de coût minimum reliant un nœud a à un nœud b.
- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Cependant, il est plus efficace d'utiliser des algorithmes spécialisés.

Le plus court chemin

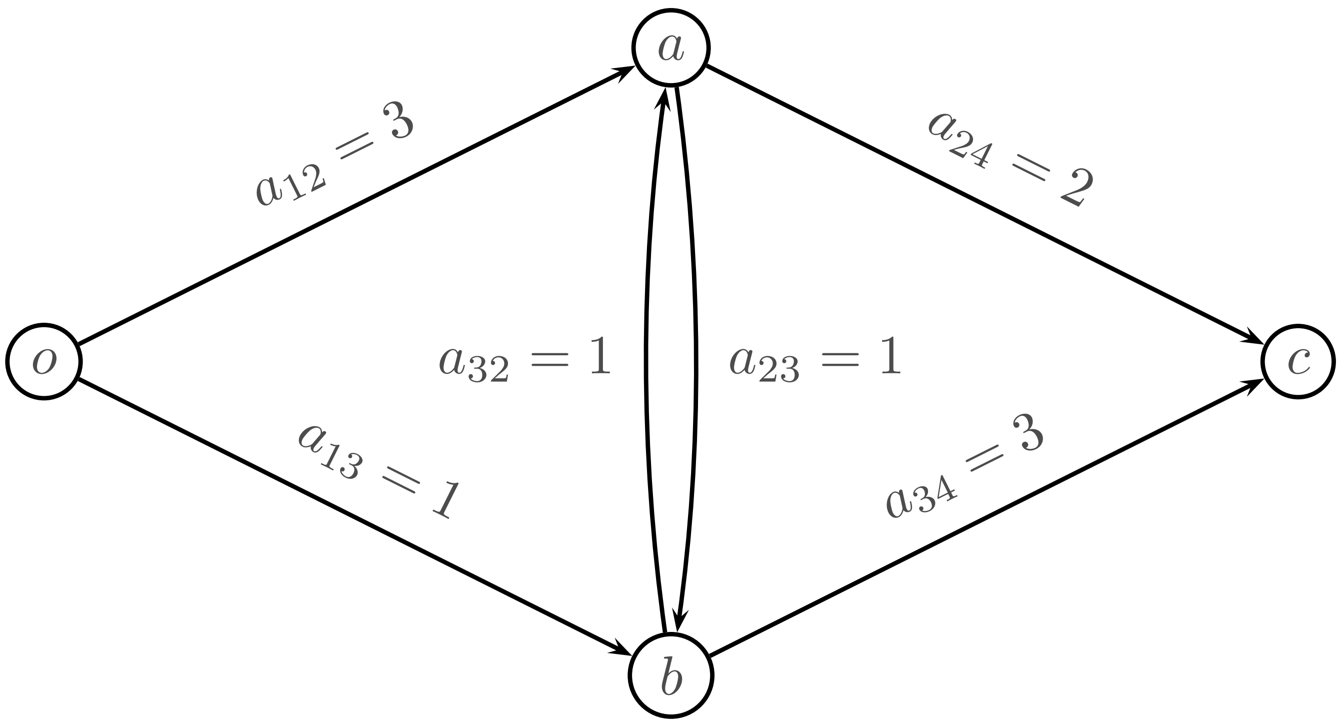
Problème :

- Soit un réseau $G = (N, A)$.
- Un coût a_{ij} est associé à chaque arc $(i, j) \in A$:
  - distance,
  - temps de trajet,
  - etc.
- Soit un nœud appelé *origine*. Par convention, ce sera le nœud o.
- Nous cherchons le chemin de coût minimum reliant le nœud o à n'importe quel autre nœud du réseau.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le plus court chemin

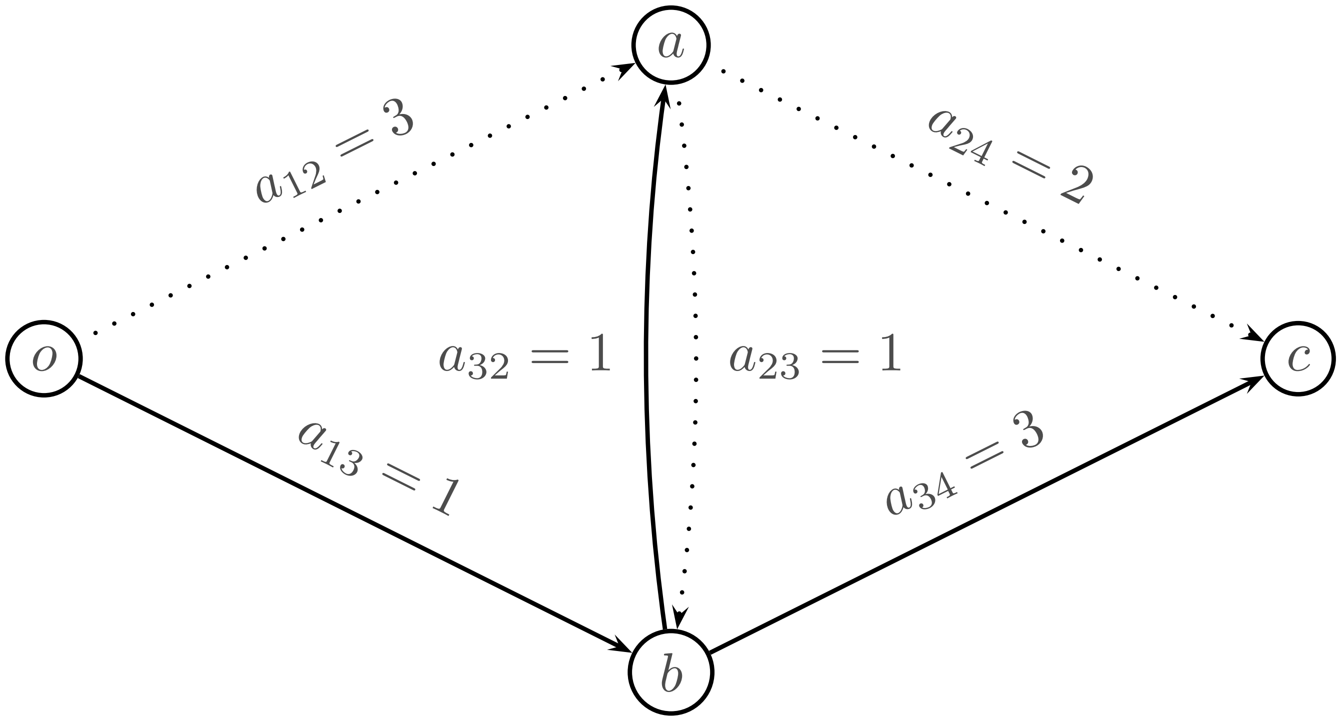


TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le plus court chemin

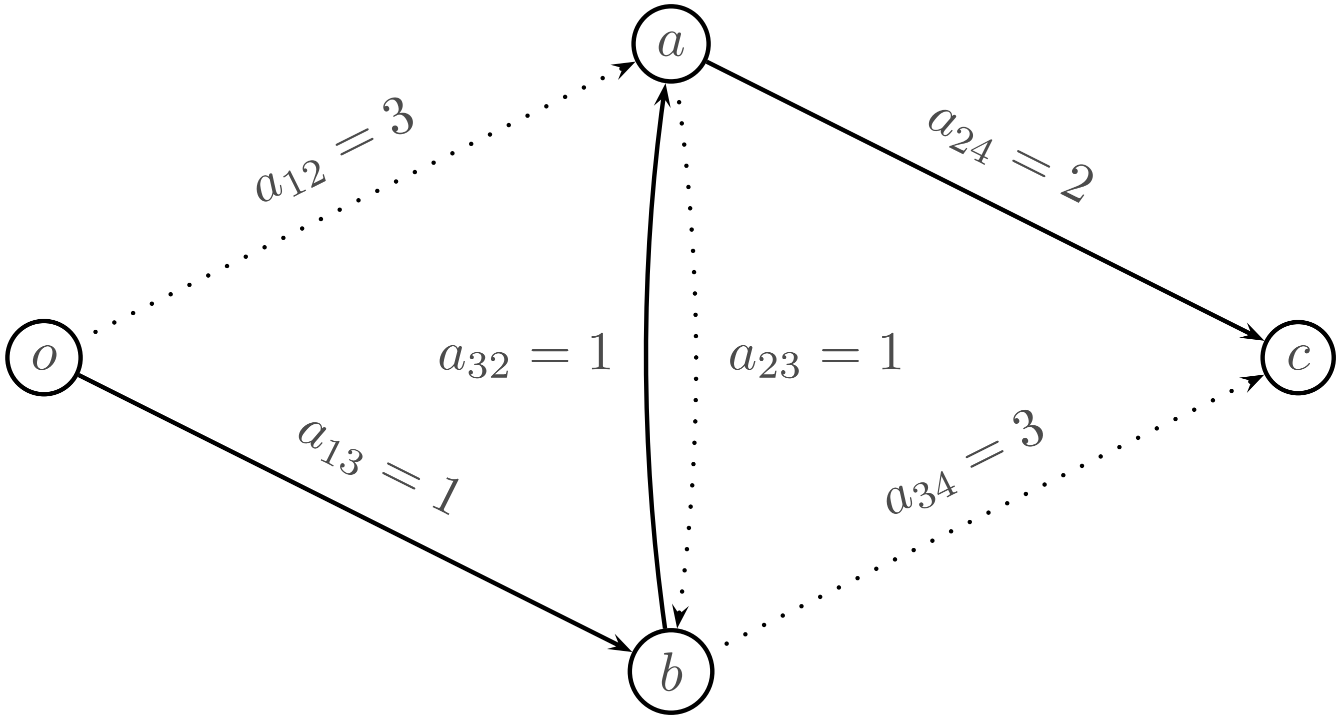
- La solution est un arbre.



Note : chaque nœud dans l'arbre a exactement un prédécesseur.

Le plus court chemin

- La solution n'est pas nécessairement unique.



Idée générale de l’algorithme

- Parcours systématique du réseau à partir de l’origine.
- A chaque nœud visité, une étiquette est associée.
- Cette étiquette est potentiellement mise à jour à chaque visite du nœud.

Conditions d'optimalité

- Soient $d_i \in \mathbb{R}$, $i \in N$ tels que

$$d_j \leq d_i + a_{ij} \quad \forall (i,j) \in A.$$

- Soit P un chemin entre l'origine o et un nœud ℓ.
- Si

$$d_j = d_i + a_{ij} \quad \forall (i,j) \in P,$$

  alors P est un plus court chemin entre o et ℓ.

Conditions d'optimalité

Preuve:

- P est composé d'arcs

$$(o, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_k, \ell)$$

- Longueur de P:

$$L(P) = a_{oi_1} + a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_k \ell}$$

- Comme $a_{ij} = d_j - d_i$,

$$L(P) = (d_{i_1} - d_o) + (d_{i_2} - d_{i_1}) + \cdots + (d_\ell - d_{i_k}) = d_\ell - d_o.$$

Conditions d'optimalité

- Soit Q un chemin quelconque entre o et ℓ.
- Q est composé d'arcs

$$(o, j_1), (j_1, j_2), \ldots, (j_n, \ell)$$

- Longueur de Q:

$$L(Q) = a_{oj_1} + a_{j_1 j_2} + \cdots + a_{j_n \ell}$$

- Comme $a_{ij} \geq d_j - d_i$,

$$L(Q) \geq (d_{j_1} - d_o) + (d_{j_2} - d_{j_1}) + \cdots + (d_\ell - d_{j_m}) = d_\ell - d_o = L(P).$$

- La longueur de P est donc plus courte que la longueur de Q.
- Comme Q est arbitraire, P est le plus court chemin entre o et ℓ.

CQFD

Algorithme

Idée :

- On démarre avec un vecteur d'étiquettes $(d_i)_{i \in N}$.
- On sélectionne un arc (i, j) qui viole les conditions d'optimalité, c.-à-d. tel que

$$d_j > d_i + a_{ij}.$$

- On met à jour l'étiquette de j:

$$d_j = d_i + a_{ij}.$$

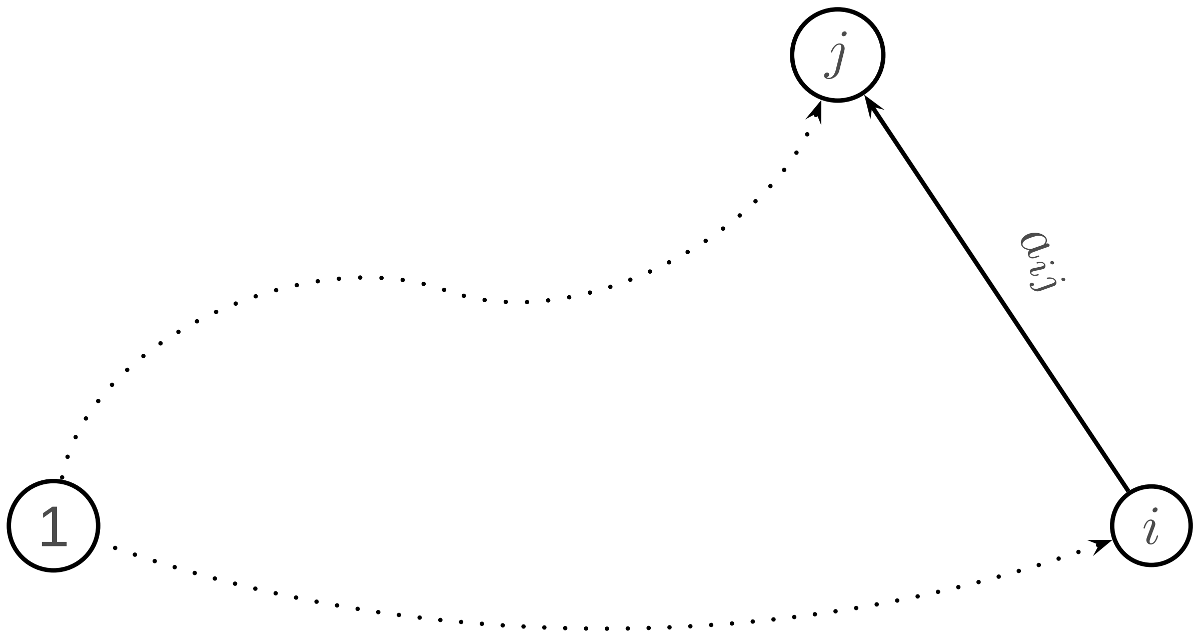
- Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les arcs vérifient la condition.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Interprétation

- d_i : longueur d'un chemin entre le nœud o et le nœud i.
- Si $d_j > d_i + a_{ij}$, chemin $o \to i \to j$ plus court que le chemin $o \to j$.



Exploration du graphe

- Travailler nœud par nœud.
- Pour un nœud donné, traiter tous les arcs sortants.
- Dès qu'un nœud est atteint, on l'ajoute à la liste.
- Dès qu'un nœud est traité, on le supprime de la liste.
- On arrête lorsque la liste est vide.
- Notons V la liste des nœuds à traiter.

Algorithme

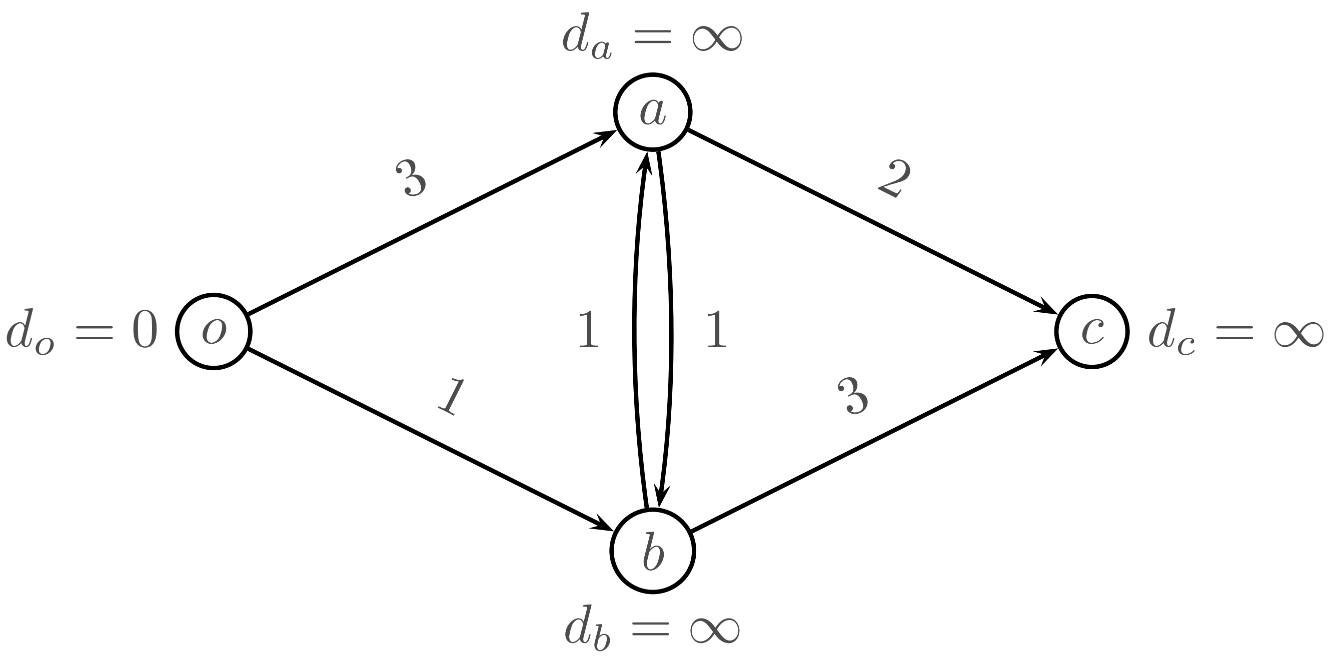
Initialisation

- Liste de nœud : $V = \{o\}$.
- Étiquettes : $d_o = 0$, $d_i = +\infty$, $\forall i \neq 1$.

Itérations Tant que $V \neq \emptyset$,

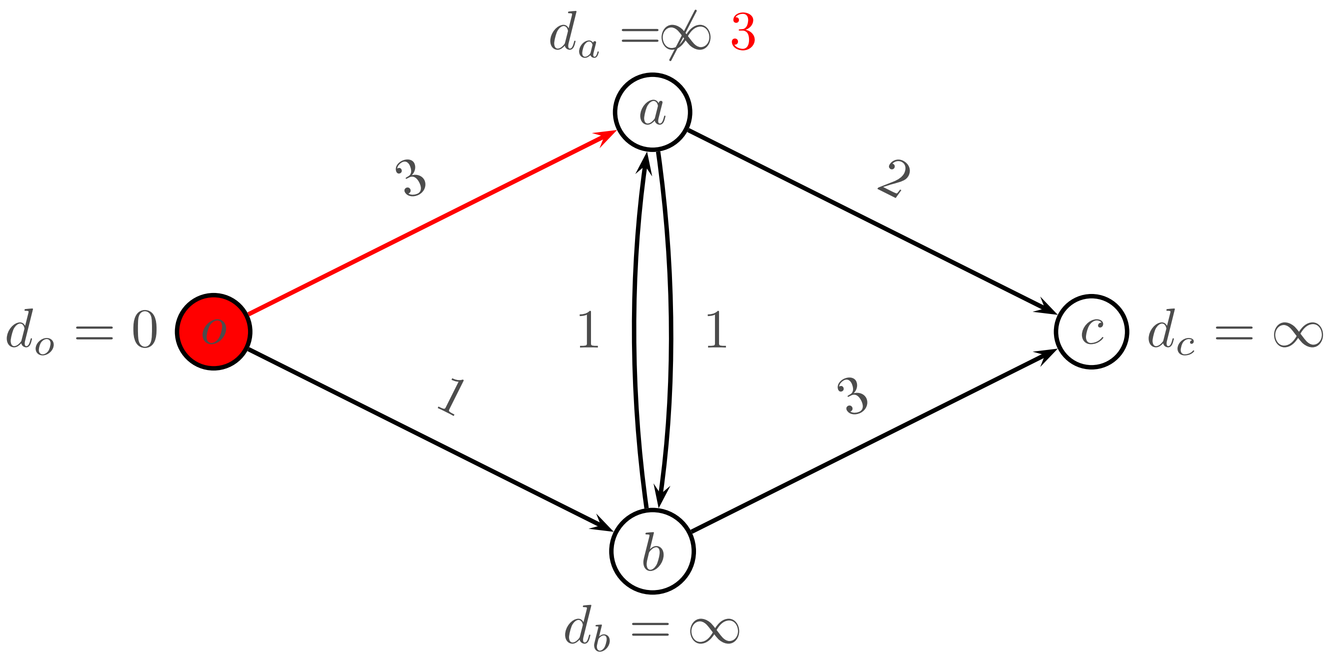
- Choisir i dans V.
- $V = V \setminus \{i\}$.
- Pour chaque arc $(i, j) \in A$
  - Si $d_j > d_i + a_{ij}$,
    - $d_j = d_i + a_{ij}$.
    - $V = V \cup \{j\}$.

Exemple



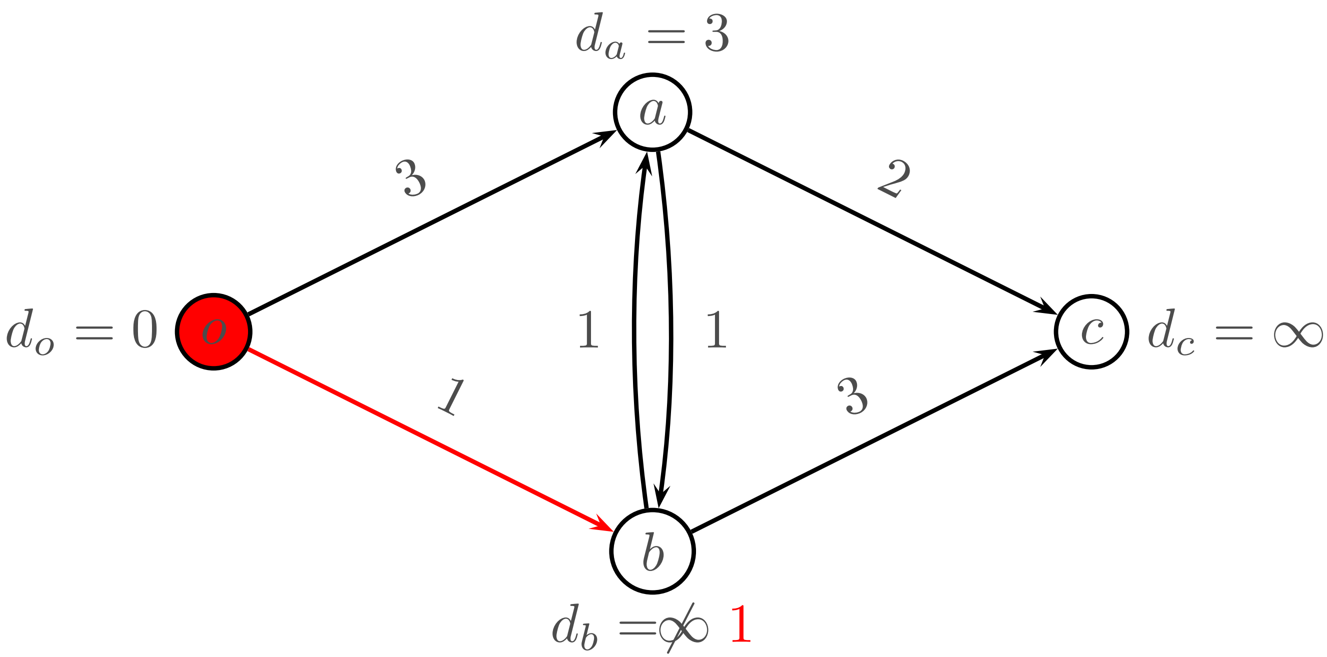
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{o\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o

Exemple



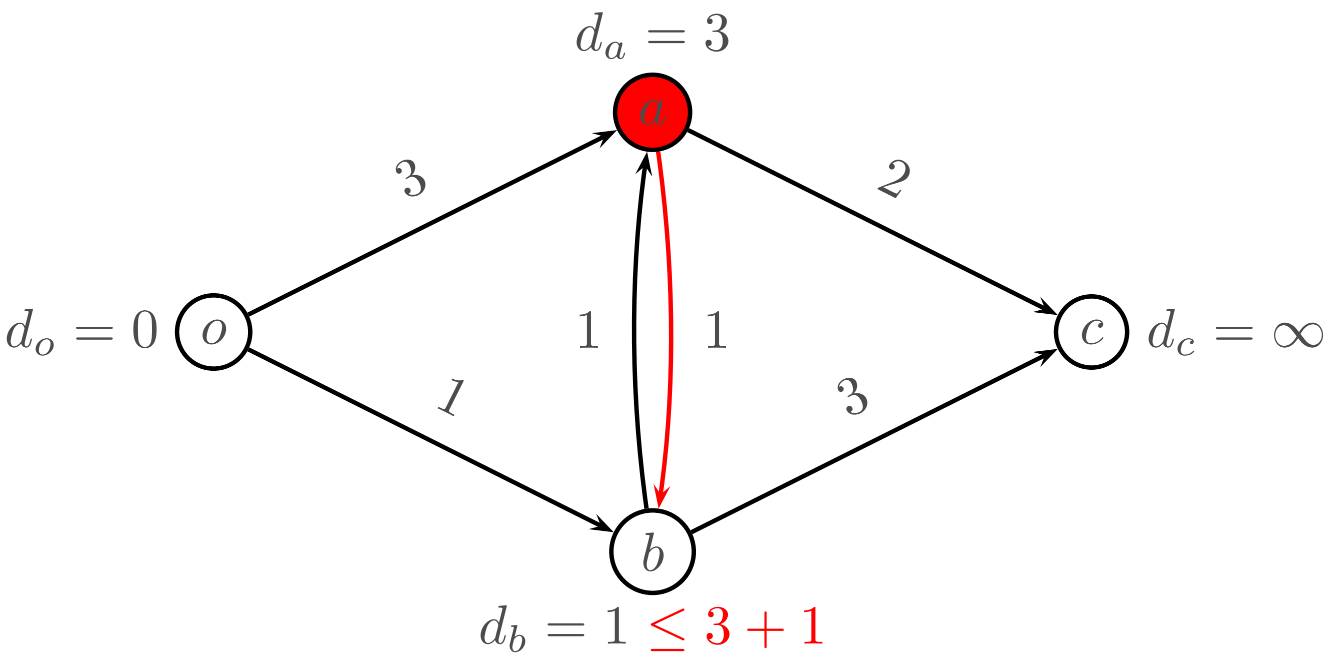
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{\, o \,\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{\, a \,\}$	0	—	3	o	∞	—	∞	—	

Exemple



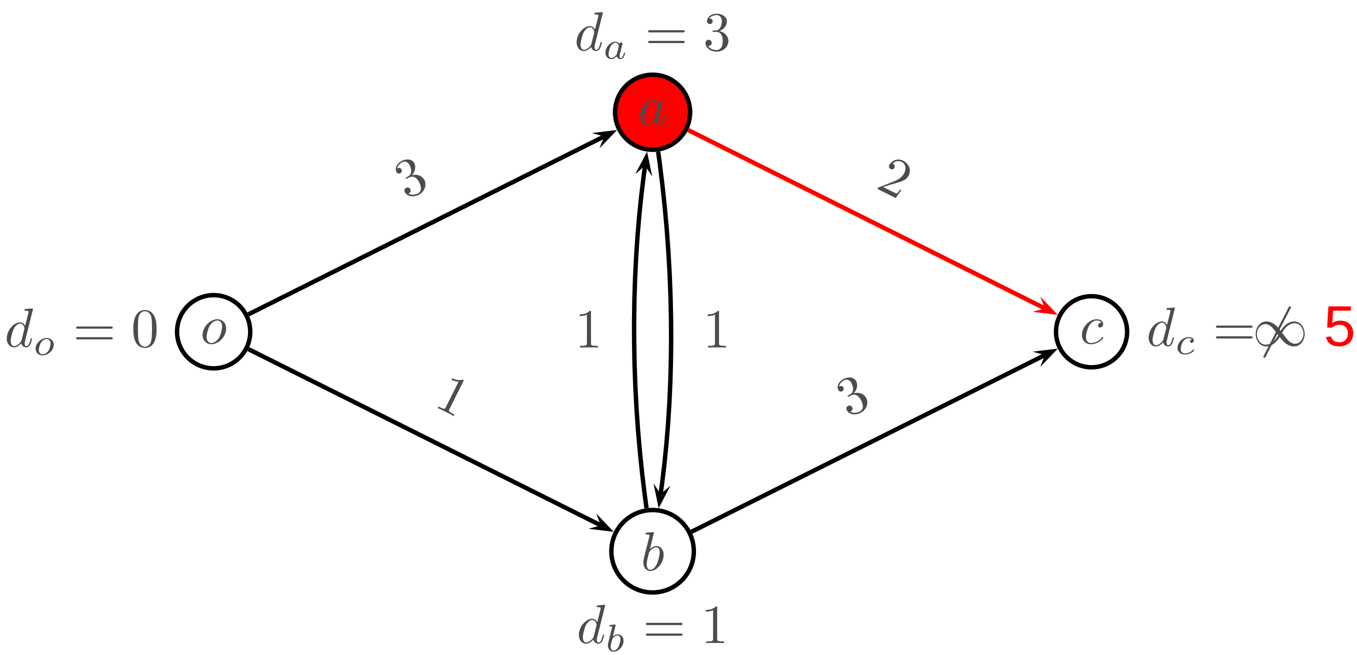
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{ o \}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{ a,b \}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a

Exemple



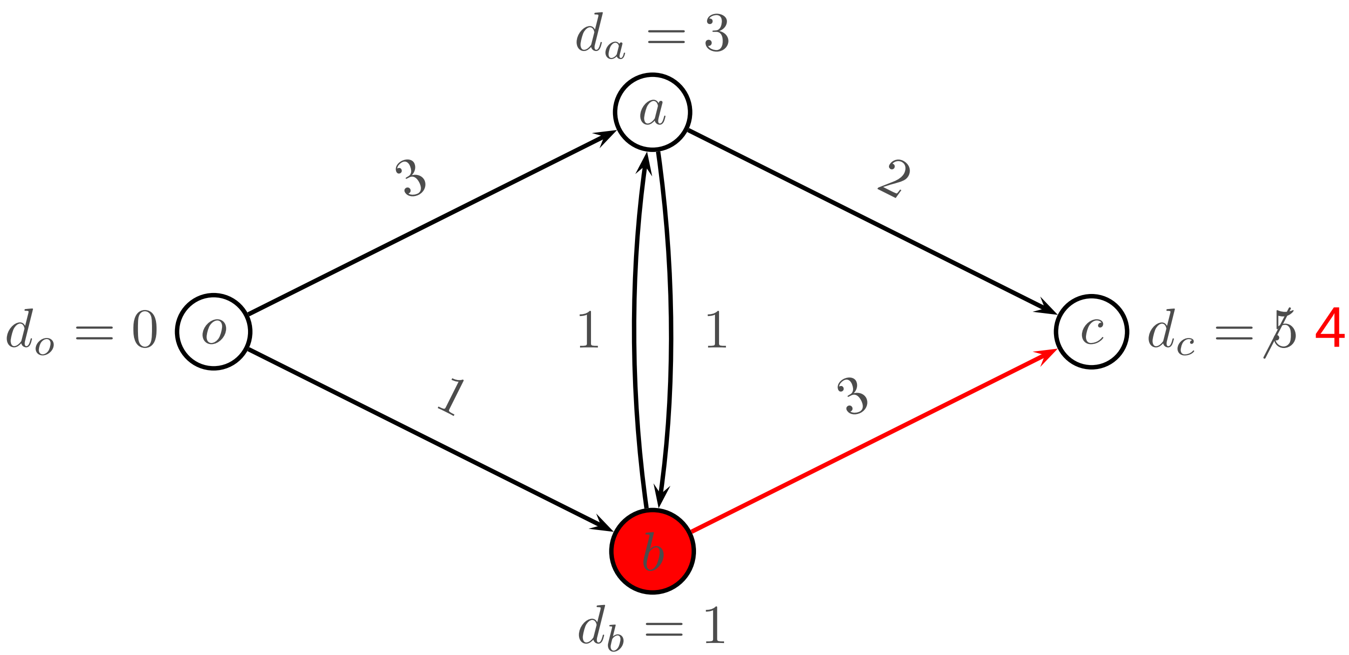
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{o\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{a, b\}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{b\}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	

Exemple



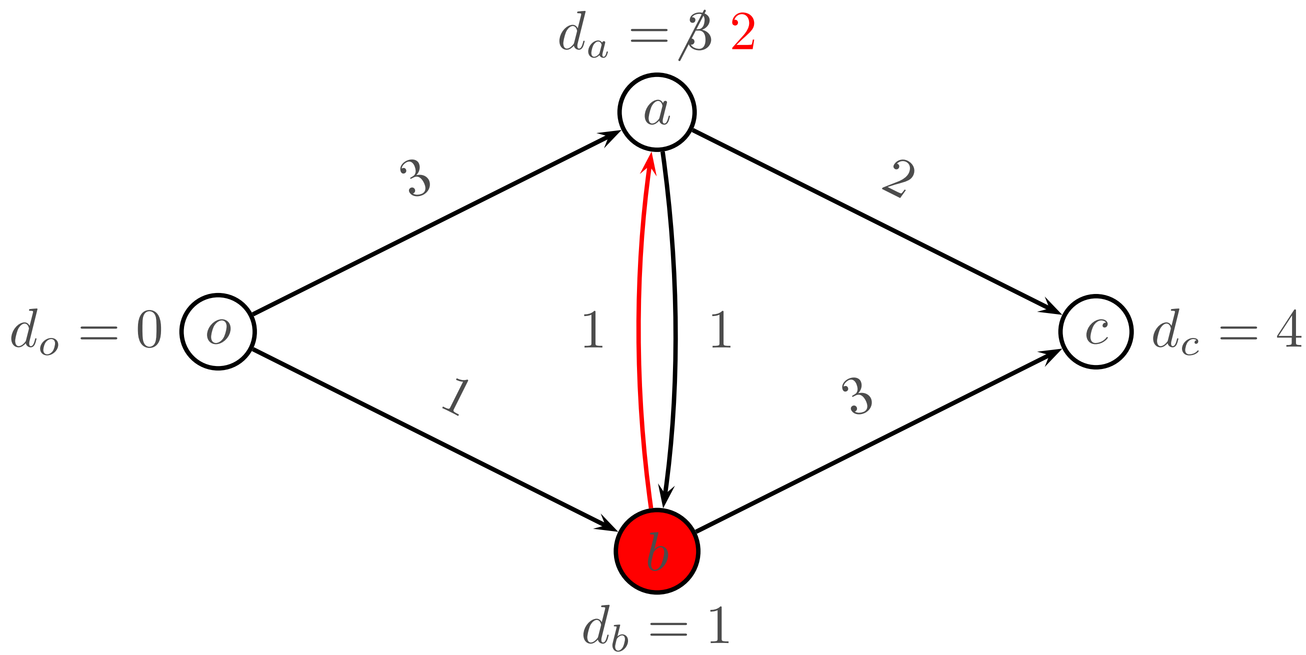
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{o\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	1
1	$\{a,b\}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{b,c\}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b

Exemple



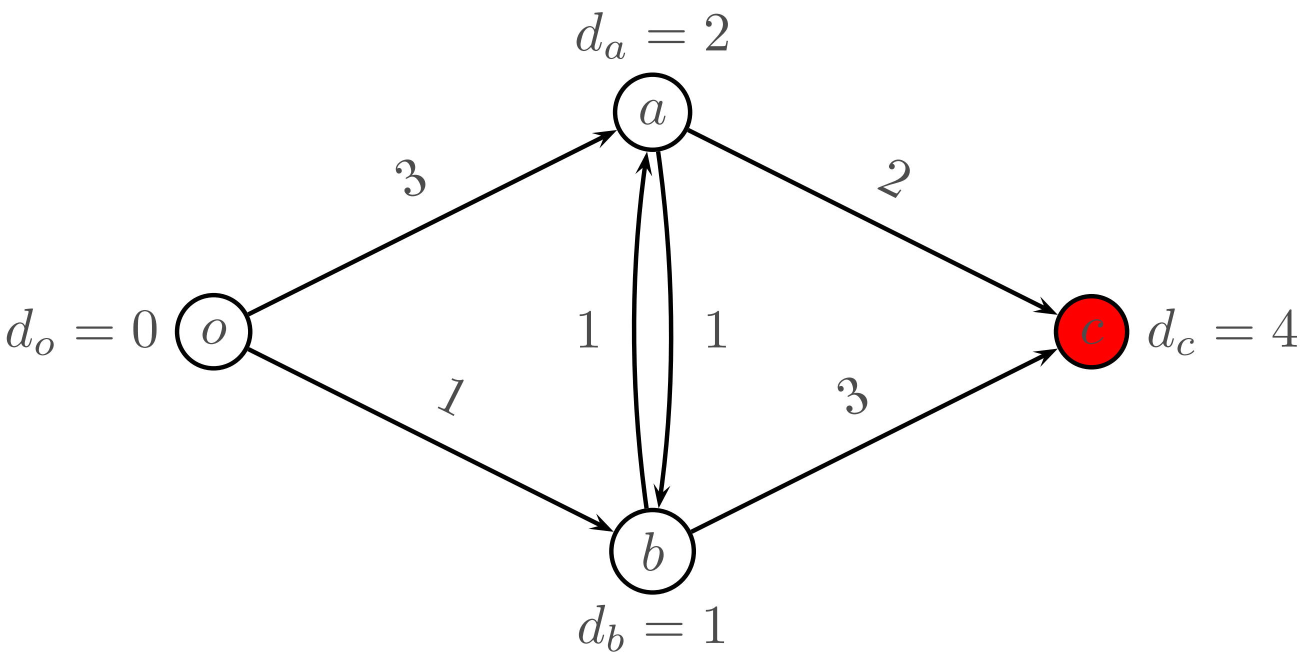
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{o\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{a,b\}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{b, c\}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b
3	$\{c\}$	0	—	3	o	1	o	4	b	

Exemple



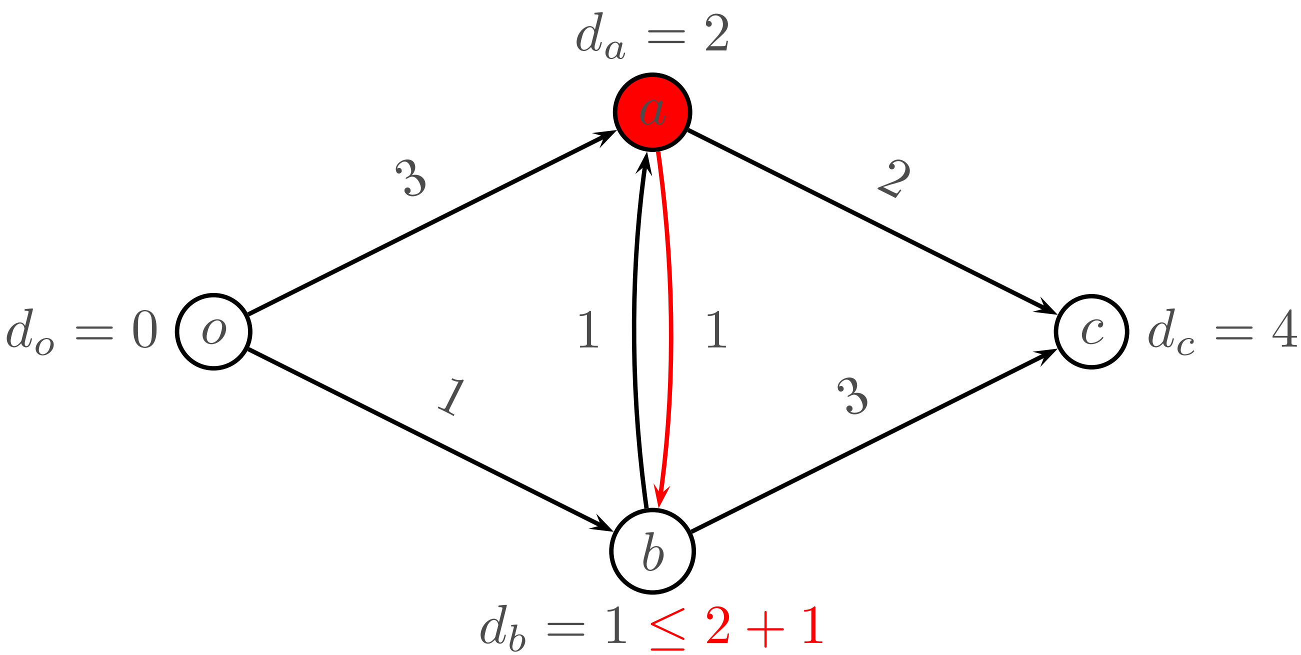
Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{ o \}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{ a,b \}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{ b,c \}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b
3	$\{ c,a \}$	0	—	2	b	1	o	4	b	c

Exemple



Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{ o \}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{ a,b \}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{ b,c \}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b
3	$\{ c,a \}$	0	—	2	b	1	o	4	b	c
4	$\{ a \}$	0	—	2	b	1	o	4	b	a

Exemple

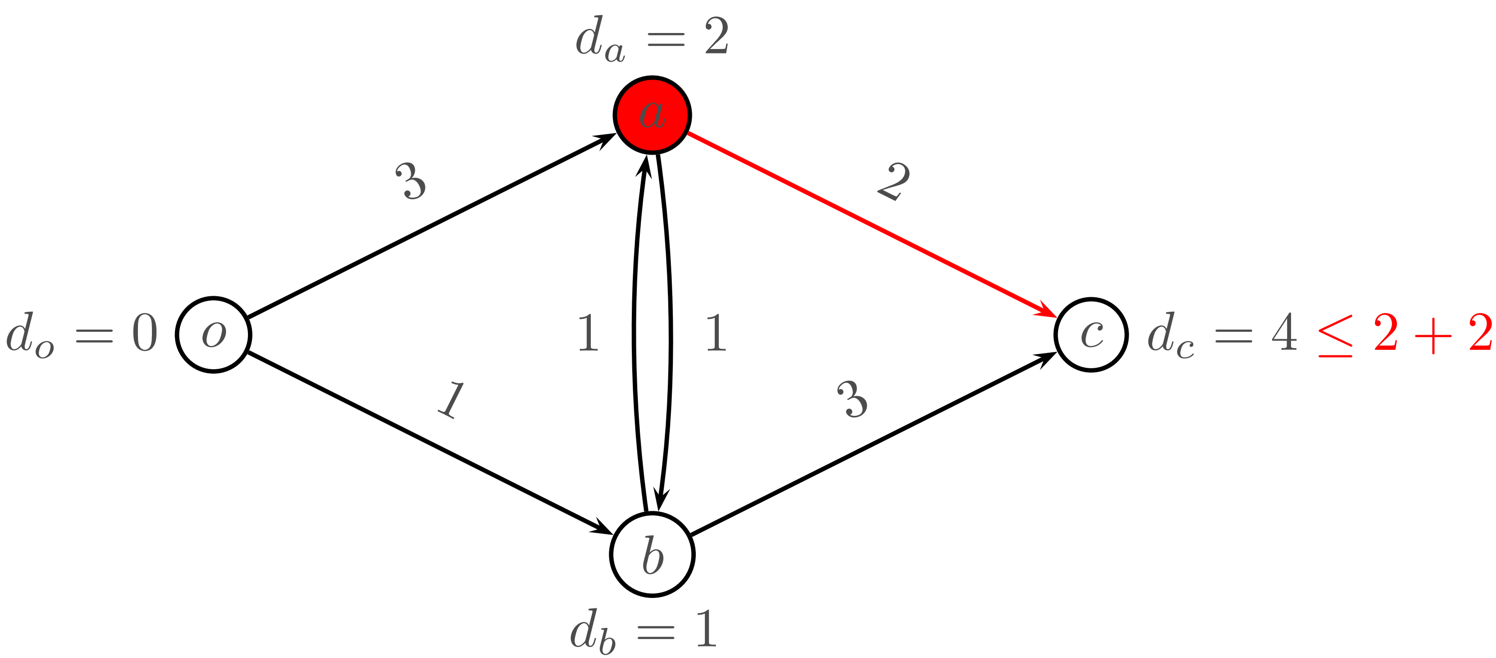


Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{o\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{a,b\}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{b,c\}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b
3	$\{c,a\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	c
4	$\{a\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	a
5	$\{\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	

TRANSP-OR

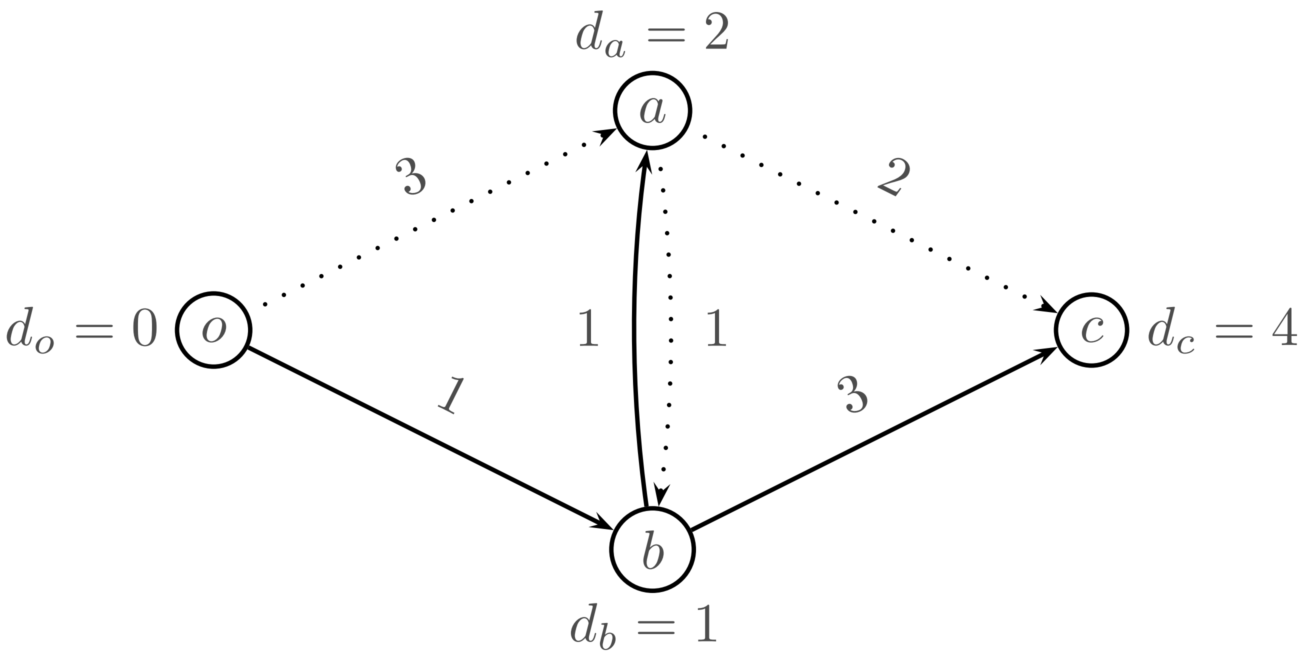
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple



Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{o\}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{a,b\}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{b,c\}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b
3	$\{c,a\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	c
4	$\{a\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	a
5	$\{\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	

Exemple



Iter	V	d_o		d_a		d_b		d_c		Traiter
0	$\{ o \}$	0	—	∞	—	∞	—	∞	—	o
1	$\{ a,b \}$	0	—	3	o	1	o	∞	—	a
2	$\{ b,c \}$	0	—	3	o	1	o	5	a	b
3	$\{ c,a \}$	0	—	2	b	1	o	4	b	c
4	$\{ a \}$	0	—	2	b	1	o	4	b	a
5	$\{\}$	0	—	2	b	1	o	4	b	

Propriétés à la fin de chaque itération

- Si $d_i < \infty$, alors d_i est la longueur d'un chemin reliant o à i.
- Si $i \notin V$, alors
  - soit $d_i = \infty$ (le nœud n'a pas encore été atteint),
  - soit $d_j \leq d_i + a_{ij}$, $\forall j$ tel que $(i, j) \in A$ (les arcs sortant ont été traités).

Propriétés si l'algorithme se termine

- Pour tout nœud j tel que $d_j < \infty$,
  - $d_o = 0$;
  - d_j est la longueur du plus court chemin entre 1 et j;
  - Équation de Bellman :

$$d_j = \min_{(i,j) \in A} d_i + a_{ij} \text{ si } j \neq o.$$

- $d_j = \infty$ si et seulement s'il n'y a pas de chemin reliant 1 et j.
- Dans ce cas, le graphe n'est pas connexe.
- L'algorithme se termine si et seulement s'il n'y a aucun chemin commençant en o et contenant un circuit à coût négatif.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme de Dijkstra

- Algorithme "générique" ne précise pas comment choisir le nœud suivant à traiter.
- Dijkstra : le nœud i à traiter est celui correspondant à la plus petite étiquette.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithme

Initialisation

- Liste de nœuds: $V = \{o\}$.
- Étiquettes : $d_o = 0$, $d_i = +\infty$, $\forall i \neq 1$.

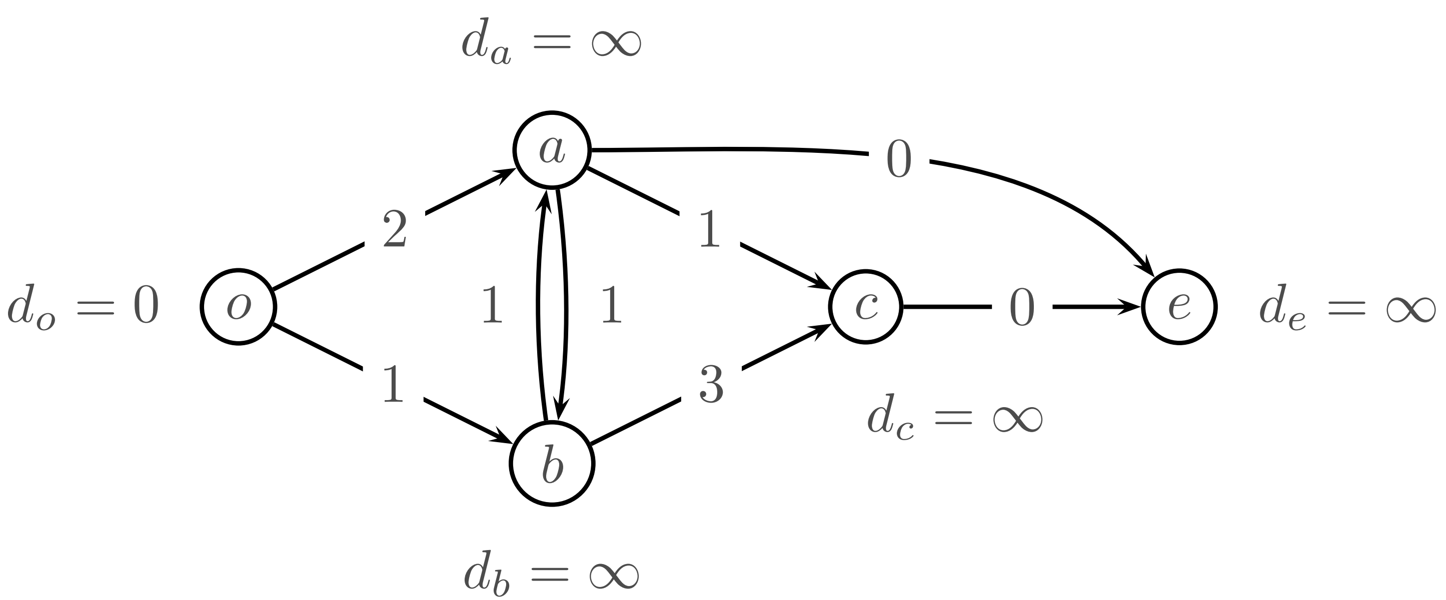
Itérations Tant que $V \neq \emptyset$,

- Soit $i \in V$ tel que $d_i \leq d_j$, $\forall j \in V$.
- $V = V \setminus \{i\}$.
- Pour chaque arc $(i, j) \in A$
  - Si $d_j > d_i + a_{ij}$,
    - $d_j = d_i + a_{ij}$.
    - $V = V \cup \{j\}$.

TRANSP-OR

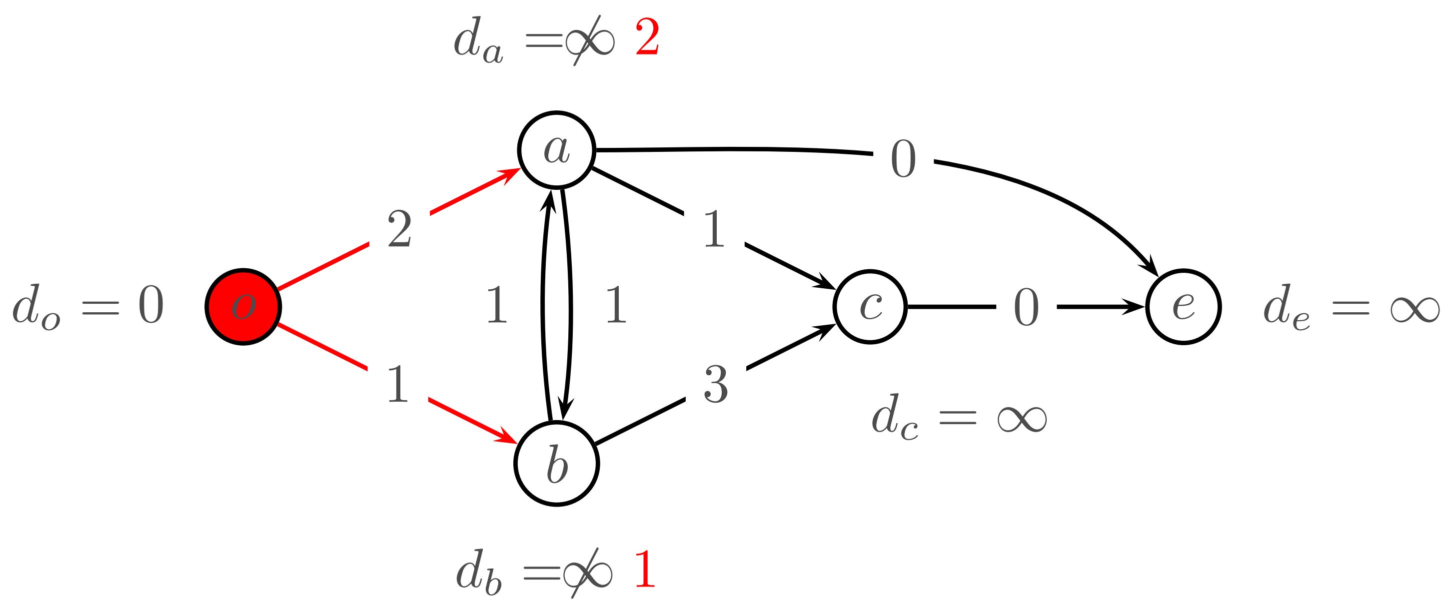
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple



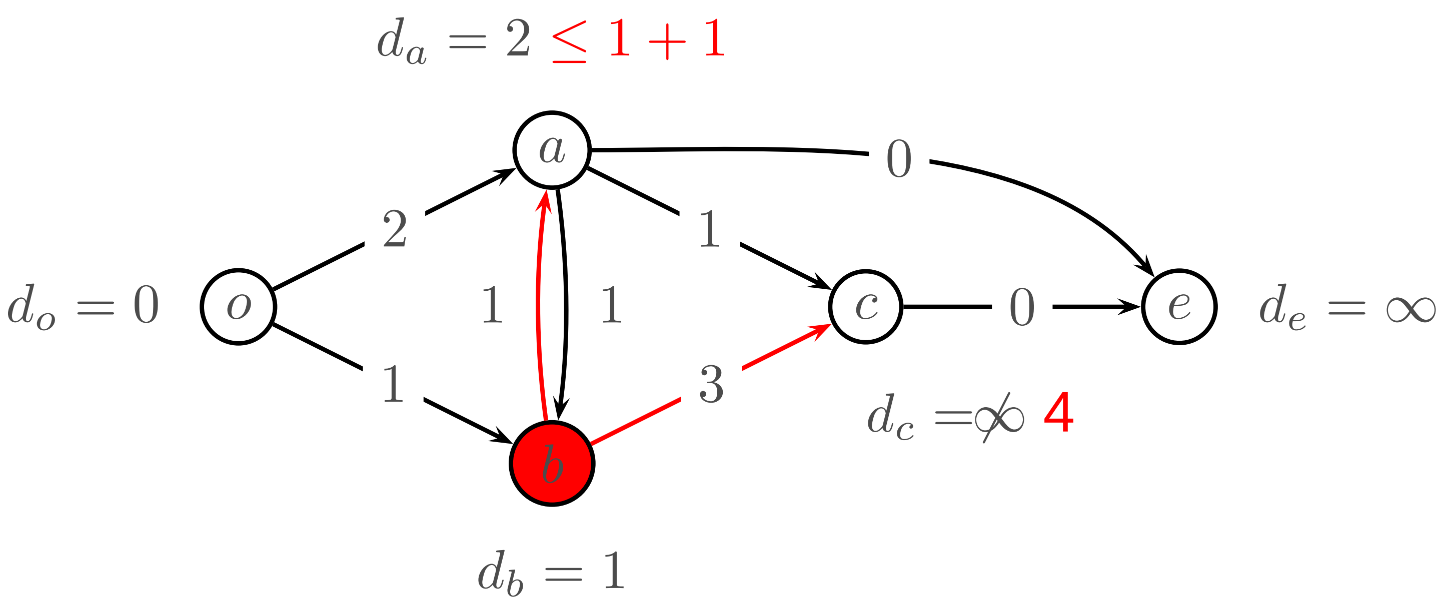
Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o

Exemple



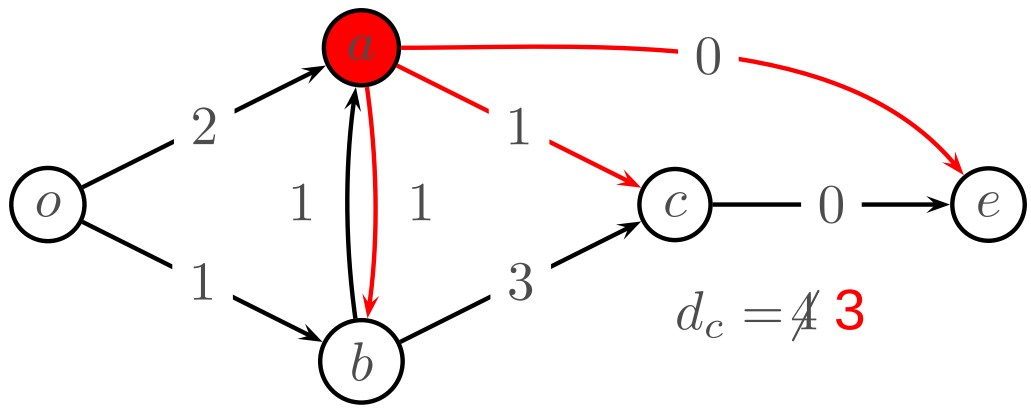
Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	∞ (-)	b

Exemple



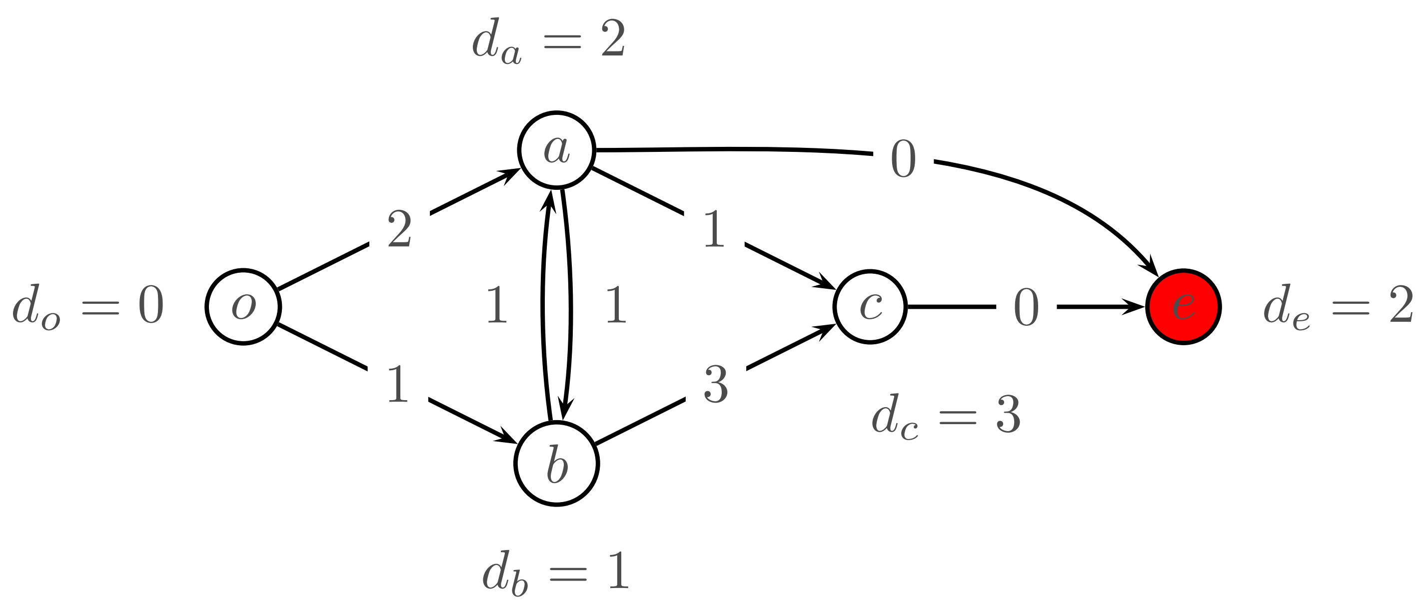
Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{o\}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{a,b\}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	∞ (-)	b
2	$\{a,c\}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	4 (b)	∞ (-)	a

Exemple



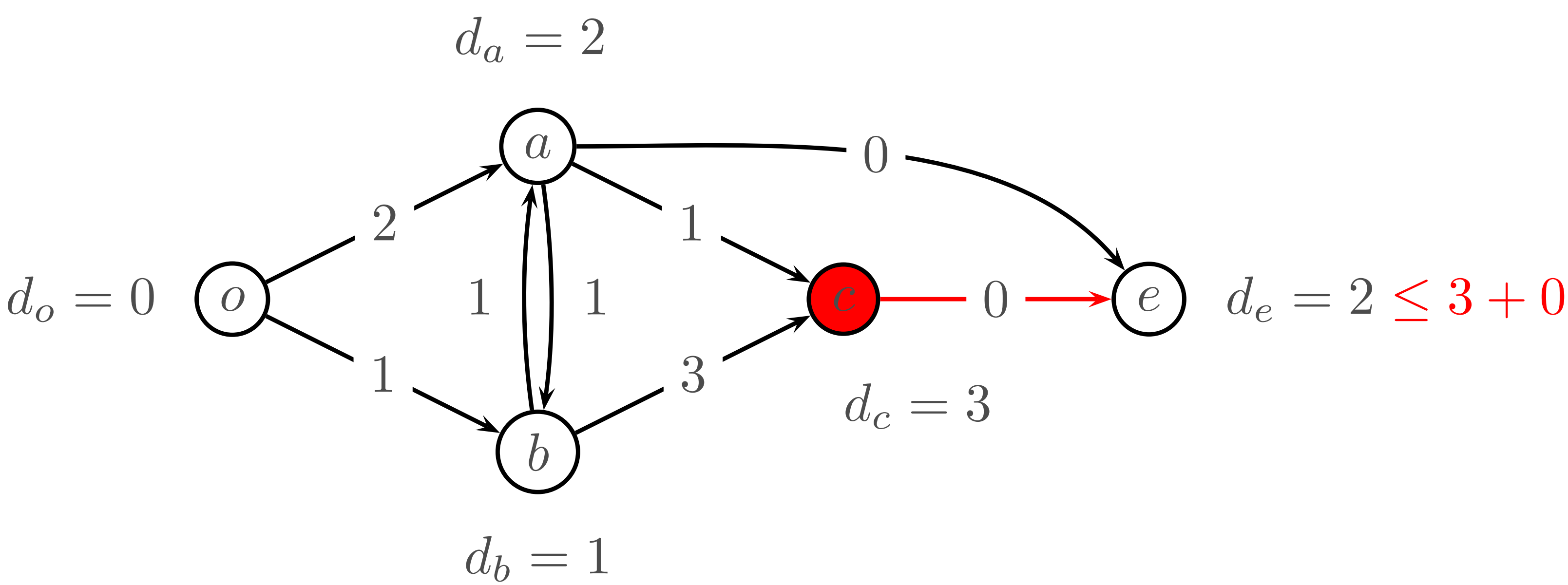
Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	4 (b)	∞ (-)	a
3	$\{ c,e \}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	3 (a)	2 (a)	e

Exemple



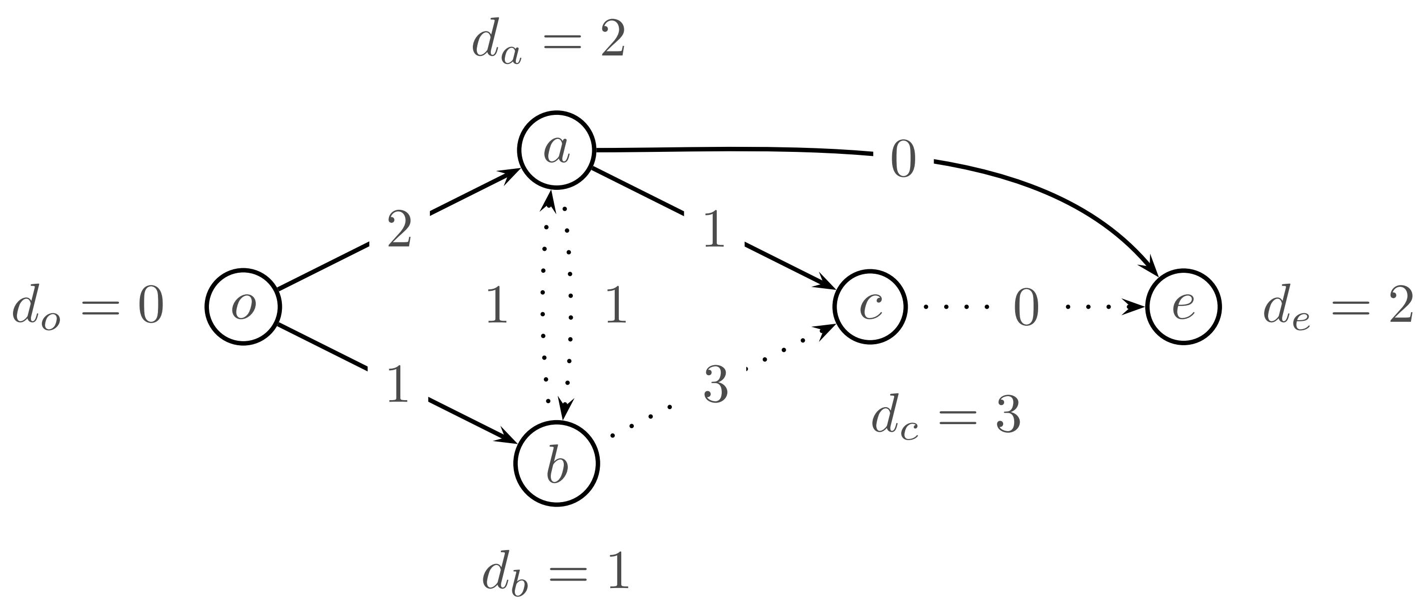
Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{o\}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{a,b\}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	∞ (-)	b
2	$\{a,c\}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	4 (b)	∞ (-)	a
3	$\{c,e\}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	3 (a)	2 (a)	e
4	$\{c\}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	3 (a)	2 (a)	c

Exemple



Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	{ o }	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	{ a,b }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	∞ (-)	b
2	{ a,c }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	4 (b)	∞ (-)	a
3	{ c,e }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	3 (a)	2 (a)	e
4	{ c }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	3 (a)	2 (a)	c
5	{ }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	3 (a)	2 (a)	

Exemple



Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	∞ (-)	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$4\ (b)$	∞ (-)	a
3	$\{ c,e \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$3\ (a)$	$2\ (a)$	e
4	$\{ c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$3\ (a)$	$2\ (a)$	c
5	$\{ \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$3\ (a)$	$2\ (a)$	

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple

Iter	V	o	a	b	c	e	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	∞ (-)	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$4\ (b)$	∞ (-)	a
3	$\{ c,e \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$3\ (a)$	$2\ (a)$	e
4	$\{ c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$3\ (a)$	$2\ (a)$	c
5	$\{ \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$3\ (a)$	$2\ (a)$	

Note : Chaque nœud n'a été traité qu'une seule fois.

Algorithme de Dijkstra

- Soit l'ensemble

$$W = \{i | d_i < \infty \text{ et } i \notin V\}.$$

- Si les coûts sur les arcs sont non négatifs, alors à chaque itération
  - aucun nœud dans W au début de l'itération n'entre dans V lors de l'itération,
  - à la fin de l'itération, $d_i \leq d_j$ si $i \in W$ et $j \notin W$.

W : ensemble des étiquettes permanentes.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

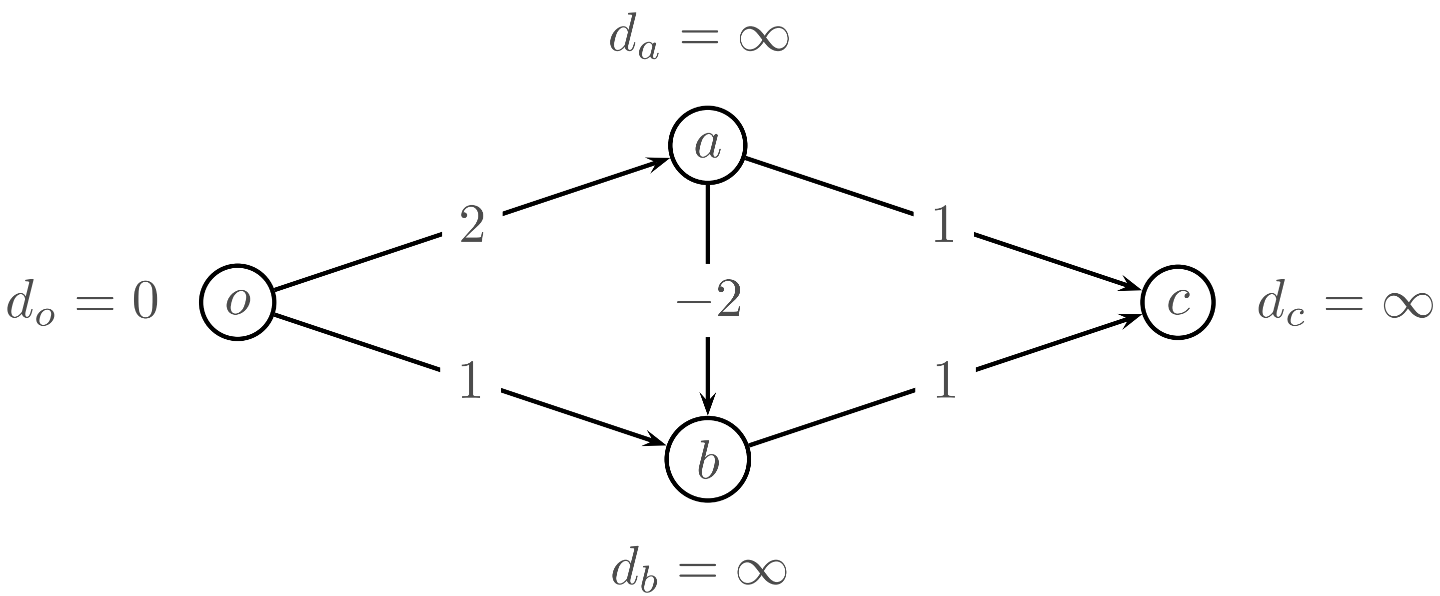
Notes

- Si l'on désire calculer le plus court chemin de o à b, on peut arrêter l'algorithme de Dijkstra dès que le nœud b est dans W.
- Si au moins un arc a un coût négatif, rien ne garantit le caractère permanent des étiquettes.

TRANSP-OR

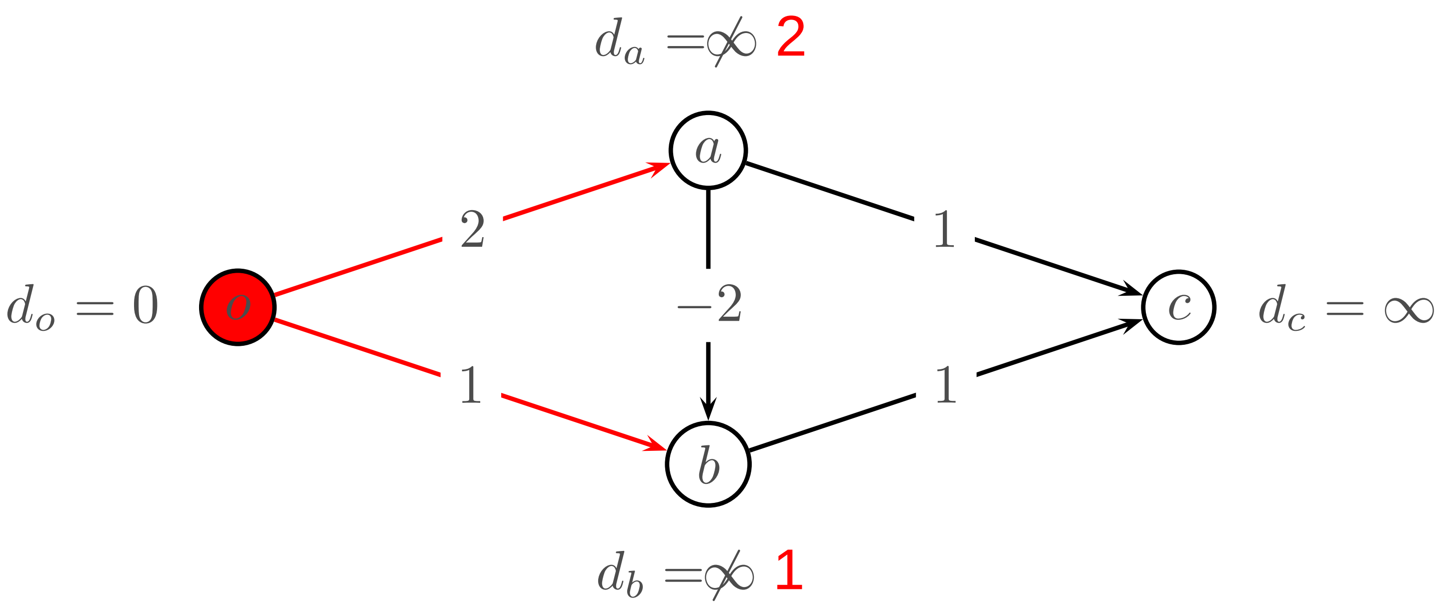
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple : coût négatif



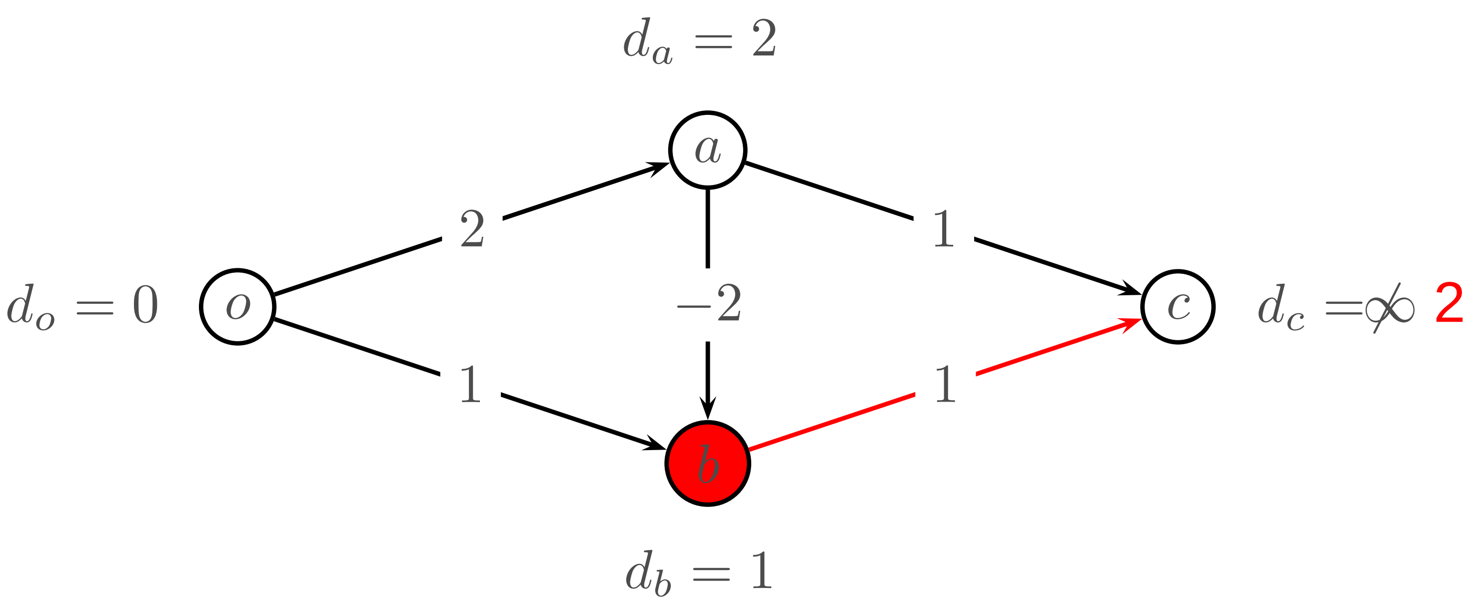
Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o

Exemple : coût négatif



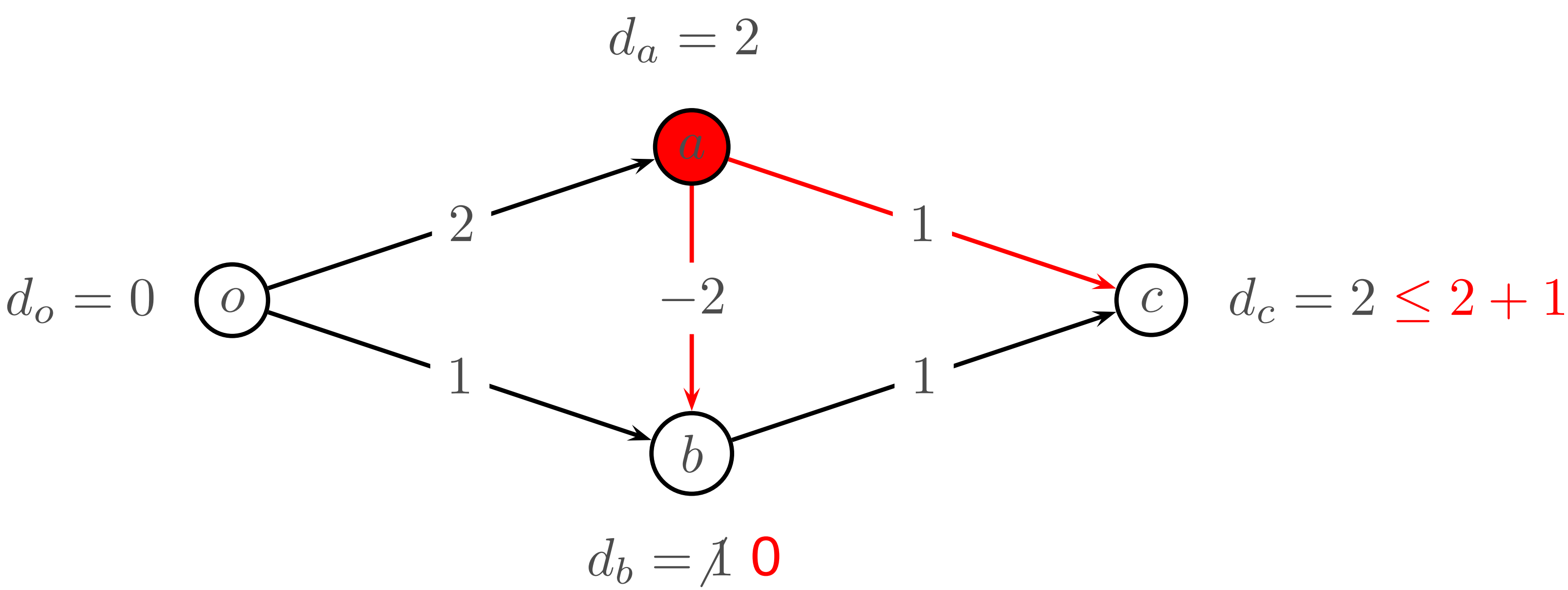
Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	{ o }	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	{ a,b }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	b

Exemple : coût négatif



Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	2 (o)	1 (o)	2 (b)	a

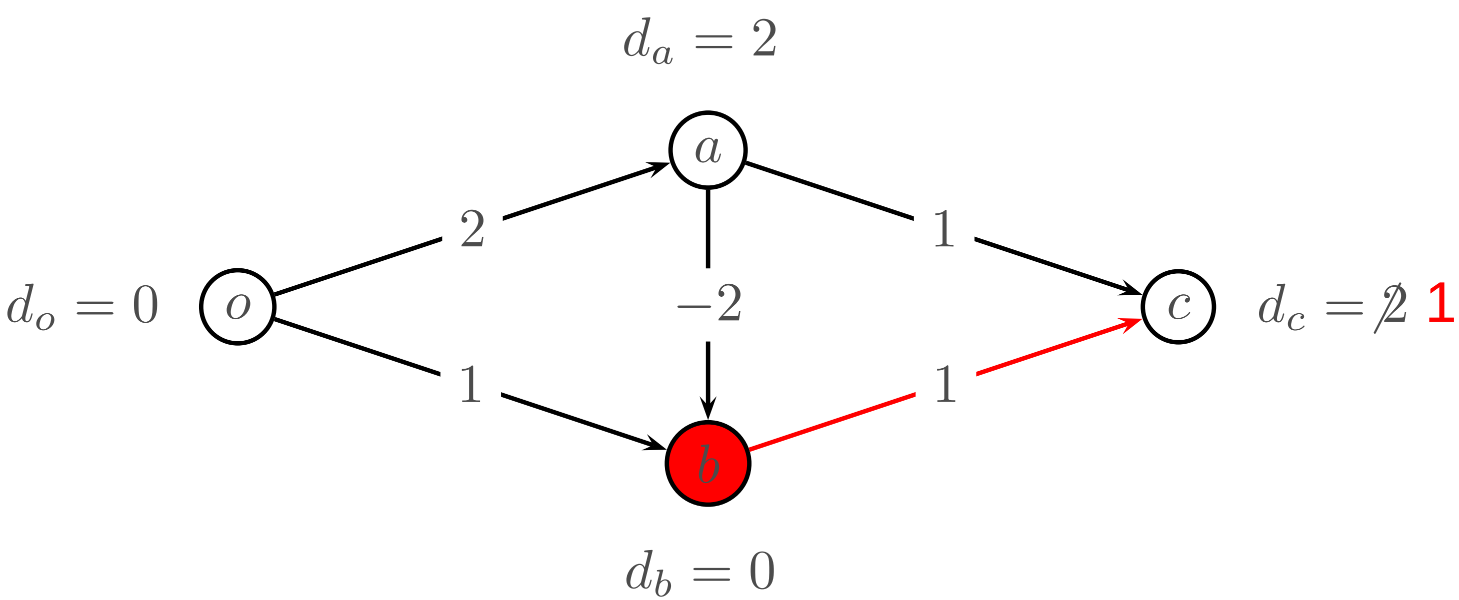
Exemple : coût négatif



Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$2\ (b)$	a
3	$\{ b,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$0\ (a)$	$2\ (b)$	b

!!!

Exemple : coût négatif

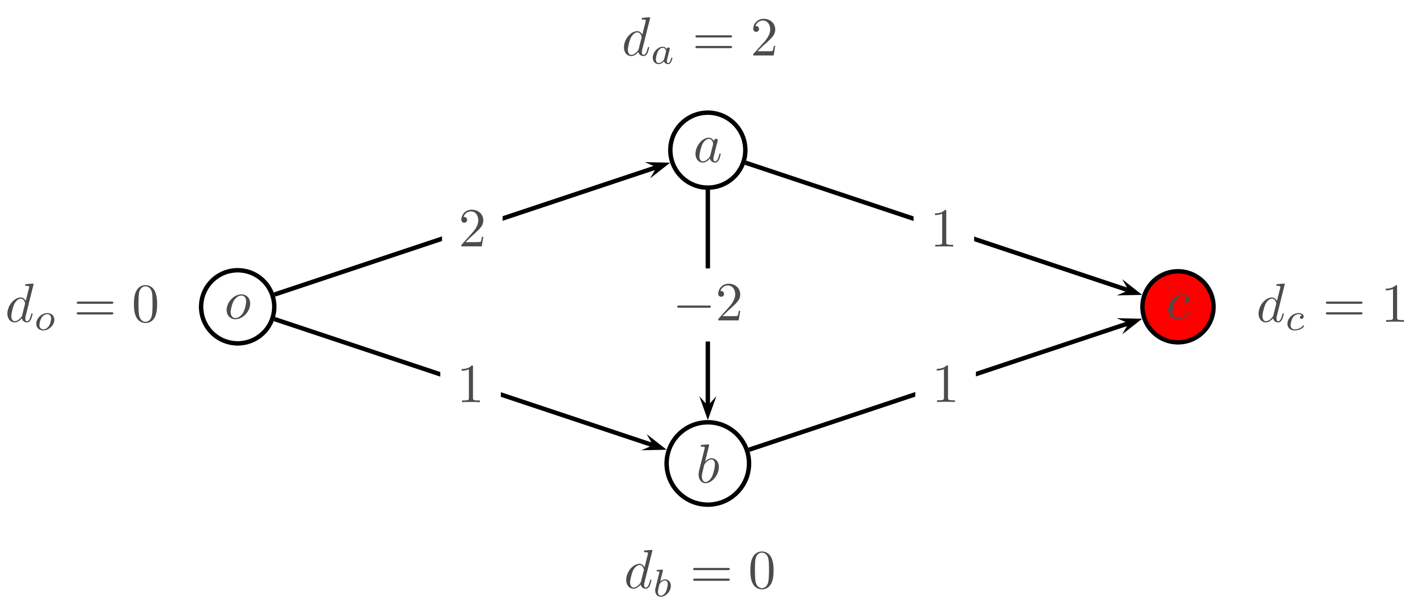


Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$2\ (b)$	a
3	$\{ b,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$0\ (a)$	$2\ (b)$	b
4	$\{ c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$0\ (a)$	$1\ (b)$	c

TRANSP-OR

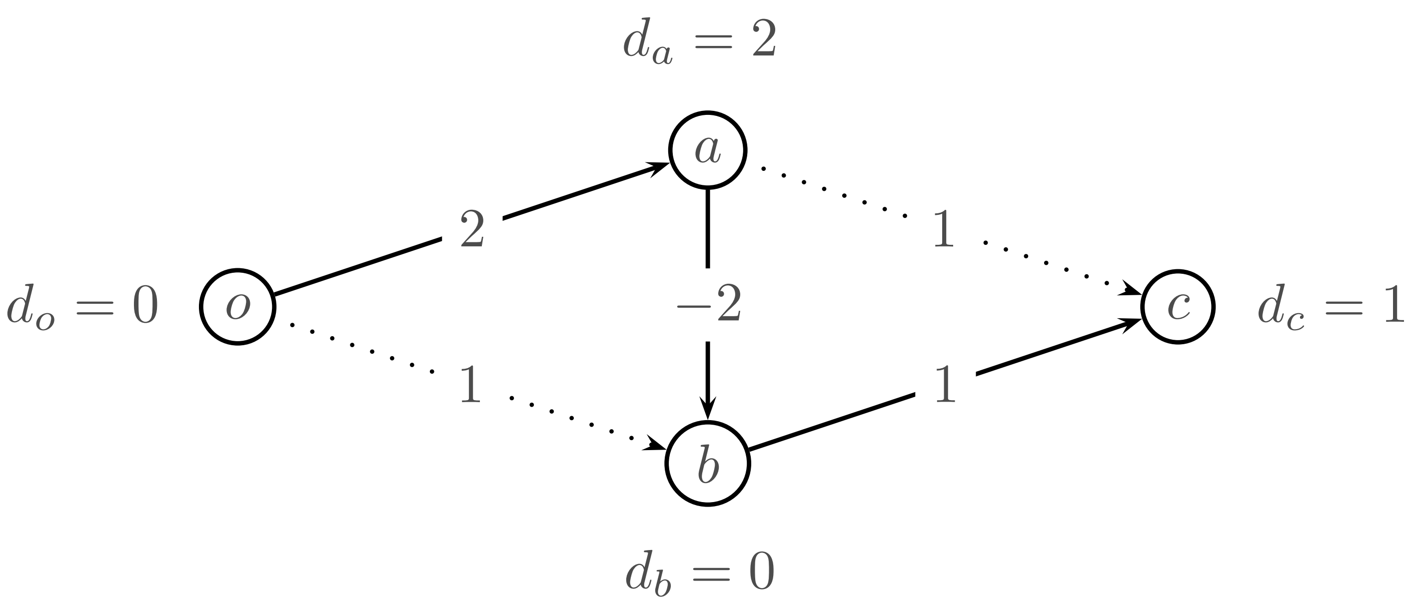
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple : coût négatif



Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	{ o }	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	{ a,b }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	∞ (-)	b
2	{ a,c }	0 (-)	2 (o)	1 (o)	2 (b)	a
3	{ b,c }	0 (-)	2 (o)	0 (a)	2 (b)	b
4	{ c }	0 (-)	2 (o)	0 (a)	1 (b)	c
5	{ }	0 (-)	2 (o)	0 (a)	1 (b)	

Exemple : coût négatif



Iter	V	o	a	b	c	Traiter
0	$\{ o \}$	0 (-)	∞ (-)	∞ (-)	∞ (-)	o
1	$\{ a,b \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	∞ (-)	b
2	$\{ a,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$1\ (o)$	$2\ (b)$	a
3	$\{ b,c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$0\ (a)$	$2\ (b)$	b
4	$\{ c \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$0\ (a)$	$1\ (b)$	c
5	$\{ \}$	0 (-)	$2\ (o)$	$0\ (a)$	$1\ (b)$	

Dijkstra et coût négatif

- L'algorithme converge.
- Mais le concept d'étiquettes permanentes n'est plus pertinent.
- Toute implémentation basée sur cette propriété ne peut fonctionner qu'avec des coûts positifs.