Introduction à la dualité

Michel Bierlaire

michel.bierlaire@epfl.ch

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

Introduction à la dualité

Comment se débarrasser des contraintes

- Permettre la violation des contraintes
- Associer une pénalité à cette violation
- S'arranger pour que la pénalité n'incite pas à violer la contrainte

Exemple de l’alpiniste

- Un milliardaire offre 1 € à un alpiniste par mètre d’altitude
- Contrainte : rester dans les Alpes
- Solution optimale : grimper sur le Mont Blanc pour 4807 €

Exemple de l'alpiniste

- Les alpinistes aiment la liberté, pas les contraintes
- Si le milliardaire accepte qu'il quitte les Alpes:
- Solution optimale : grimper sur l'Everest pour 8848 €

Exemple de l’alpiniste

- Le milliardaire accepte qu’il quitte les Alpes.
- Mais en s’acquittant d’une amende de 4041 €
- Grimper sur l’Everest rapportera donc 8848 €-4041 €=4807 €
- Même gain que pour grimper sur le Mont Blanc
- Il n’y a plus intérêt à quitter les Alpes

Question : comment le milliardaire doit-il calculer le prix ?

Exemple de l'alpiniste

Modélisation

- x est la position (longitude/latitude)
- $f(x)$ est l'altitude en x
- Premier problème :

$$\max_x f(x) \text{ s.c. } x \in \text{Alpes}$$

- Amende: $a(x)$, avec $a(x) = 0$ si $x \in$ Alpes.
- Second problème :

$$\max_x f(x) - a(x).$$

Exemple d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} 1 - x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solution optimale : $(0, 1)$ Coût optimal : 1

Relaxons la contrainte $1 - x_1 - x_2 = 0$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple d'optimisation

Amende proportionnelle à la violation :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Quelle valeur donner à λ pour que la solution optimale du problème relaxé ne soit pas meilleure que celle du problème de départ ?

Exemple d'optimisation

$$\lambda = 0$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

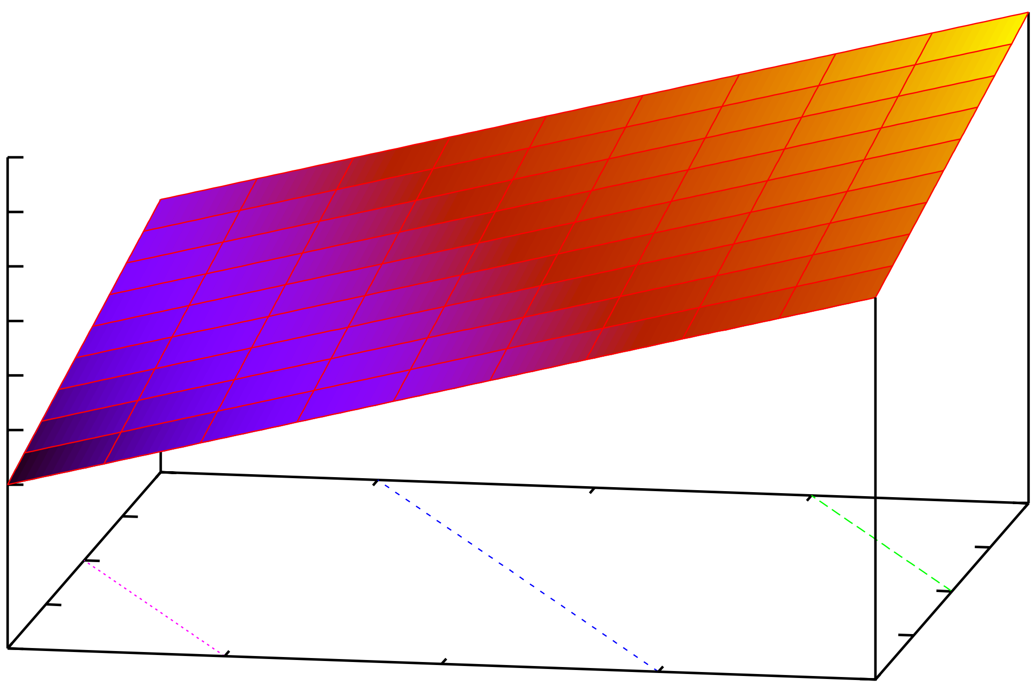
sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solution optimale : $(0,0)$ Coût optimal : 0

Violation de la contrainte. Mauvais choix de λ

Exemple d'optimisation



Exemple d’optimisation

$$\lambda = 2$$

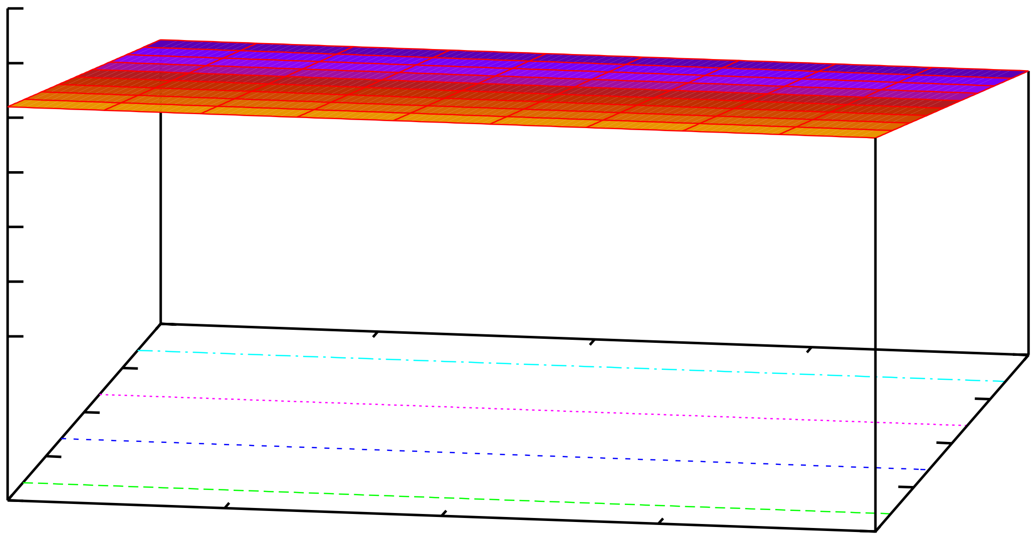
$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2 - x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problème non borné. Mauvais choix de λ

Exemple d’optimisation



Exemple d'optimisation

$$\lambda = 1$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 + 1$$

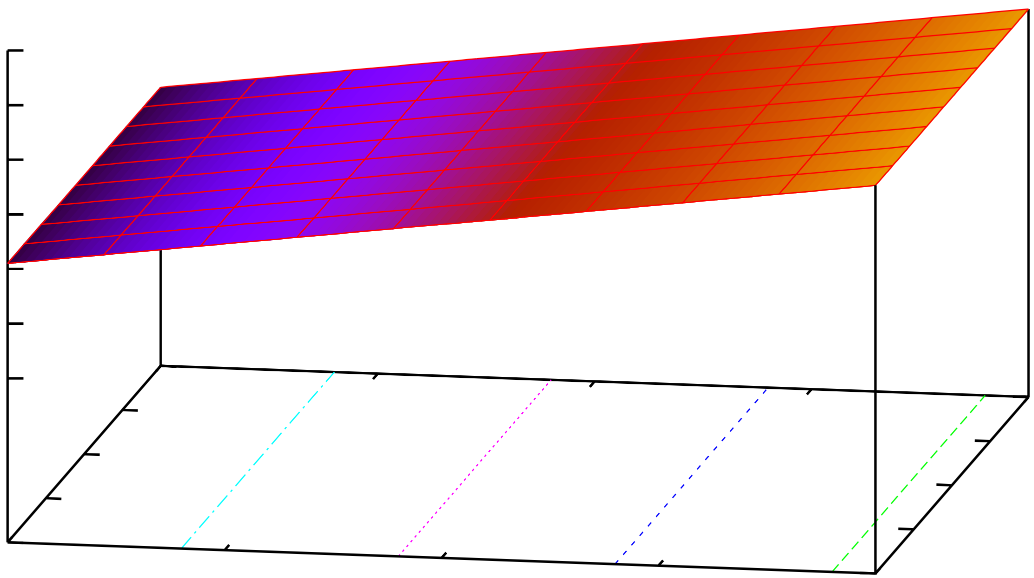
sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solution optimale : $(0, x_2)$ Coût optimal : 1

Quel que soit x_2, même coût optimal. On choisit donc $x_2 = 1$ pour vérifier la contrainte.

Exemple d’optimisation



Fonction lagrangienne

Fonction lagrangienne

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ *sous contraintes* $h(x) = 0$ *et* $g(x) \leq 0$*, et soient les vecteurs* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *et* $\mu \in \mathbb{R}^p$*. La fonction* $L : \mathbb{R}^{n+m+p} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x) \end{aligned}$$

est appelée Lagrangien *ou* fonction lagrangienne *du problème.*

Fonction duale

Comme dans les exemples, pour chaque valeur de λ et μ, on peut minimiser la fonction lagrangienne.

Fonction duale

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ *sous contraintes* $h(x) = 0$ *et* $g(x) \leq 0$, *et sa fonction lagrangienne* $L(x, \lambda, \mu)$. *La fonction* $q : \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$q(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu)$$

est la fonction duale *du problème. Les paramètres* λ *et* μ *sont appelés* variables duales.

Fonction duale

Borne sur la fonction duale *Soit x^* solution du problème d'optimisation $\min f(x)$ sous contraintes $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$, et soit $q(\lambda, \mu)$ la fonction duale du même problème. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\mu \geq 0$. Alors,*

$$q(\lambda, \mu) \leq f(x^*),$$

et la fonction duale fournit des bornes inférieures sur la valeur optimale du problème.

(p.113)

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Preuve

$$
\begin{array}{rcll}
q(\lambda,\mu) & = & \min_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda,\mu) & \text{par définition} \\
& \leq & L(x^*,\lambda,\mu) & \\
& = & f(x^*) + \lambda^T h(x^*) + \mu^T g(x^*) & \text{par définition} \\
& = & f(x^*) + \mu^T g(x^*) & \text{car } x^* \text{ vérifie les contr. d'égalité} \\
& \leq & f(x^*). & \text{car } x^* \text{ vérifie les contr. d'inégalité et } \mu \geq 0
\end{array}
$$

Problème dual

Comment choisir λ et μ ?

- Eviter que le problème relaxé (i.e. le calcul de la fonction duale) soit non borné.
- Eviter, dans la mesure du possible, que

$$q(\lambda, \mu) < f(x^*)$$

avec x^* solution du problème de départ.

Problème dual

Problème dual

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ *sous contraintes* $h(x) = 0$ *et* $g(x) \leq 0$ *et sa fonction duale* $q(\lambda, \mu)$*. Soit* $X_q \subseteq \mathbb{R}^{m+p}$ *le domaine de* q*, c'est-à-dire*

$$X_q = \{\lambda, \mu | q(\lambda, \mu) > -\infty\}$$

Le problème d'optimisation

$$\max_{\lambda,\mu} q(\lambda, \mu) \text{ s.c. } \mu \geq 0 \text{ et } (\lambda, \mu) \in X_q$$

est le problème dual *du problème d'optimisation. Dans ce contexte, le problème de départ s'appelle* problème primal.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rclcll} h_1(x) & = & 1 - x_1 - x_2 & = & 0 & (\lambda) \\ g_1(x) & = & -x_1 & \leq & 0 & (\mu_1) \\ g_2(x) & = & -x_2 & \leq & 0 & (\mu_2) \end{array}$$

Fonction lagrangienne :

$$\begin{array}{ll} L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) & \\ = & 2x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2) - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 \\ = & (2 - \lambda - \mu_1)x_1 + (1 - \lambda - \mu_2)x_2 + \lambda \end{array}$$

Exemple

Pour que la fonction duale soit bornée, il faut que les coefficients de x_1 et x_2 soient nuls, et donc

$$2 - \lambda - \mu_1 = 0, \quad 1 - \lambda - \mu_2 = 0,$$

ou encore

$$\mu_1 = 2 - \lambda, \quad \mu_2 = 1 - \lambda.$$

Comme $\mu_1 \geq 0$, il faut que $\lambda \leq 2$. Comme $\mu_2 \geq 0$, il faut que $\lambda \leq 1$.

Exemple

Ainsi,

$$X_q = \{\lambda, \mu_1, \mu_2 | \lambda \leq 1, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0\}$$

et la fonction duale devient

$$q(\lambda, \mu_1, \mu_2) = \lambda.$$

Exemple

Le problème dual s'écrit

$$\max \lambda \text{ s.c. } \lambda \leq 1, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0,$$

dont la solution optimale est $\lambda^* = 1$. Comme

$$\mu_1 = 2 - \lambda, \quad \mu_2 = 1 - \lambda.$$

on a $\mu_1^* = 1$ et $\mu_2^* = 0$.

Dualité faible

Dualité faible *Soit* x^* *solution du problème primal et soit* (λ^*, μ^*) *solution optimale du problème dual associé. Alors*

$$q(\lambda^*, \mu^*) \leq f(x^*)$$

(Corollaire de la borne duale – p.116)

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Problème dual

Concavité-convexité du problème dual *Soit le problème dual* $\max_{\lambda,\mu} q(\lambda, \mu)$ *s.c.* $\mu \geq 0$ *et* $(\lambda, \mu) \in X_q$ *d'un problème d'optimisation. Alors, la fonction objectif est concave, et le domaine de la fonction duale est convexe.*

(p. 116)

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dualité en optimisation linéaire

$$\min_x c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

et donc, nous avons

$$h(x) = b - Ax$$

et

$$g(x) = -x.$$

Dualité en optimisation linéaire

Fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned} L(x,\lambda,\mu) &= c^T x + \lambda^T(b - Ax) - \mu^T x \\ &= (c - A^T\lambda - \mu)^T x + \lambda^T b. \end{aligned}$$

Pour qu'elle soit bornée, il faut

$$c - A^T\lambda - \mu = 0.$$

Ainsi,

$$L(x,\lambda,\mu) = \lambda^T b \quad \forall x, \mu$$

et donc

$$q(\lambda,\mu) = \min_x L(x,\lambda,\mu) = \lambda^T b.$$

Dualité en optimisation linéaire

Le problème dual s'écrit

$$\max_{\lambda,\mu} \lambda^T b$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} \mu & \geq & 0 \\ \mu & = & c - A^T\lambda. \end{array}$$

- Eliminer μ
- Renommer λ en x
- Changer la maximisation en minimisation.

Dualité en optimisation linéaire

On obtient

$$\min_x -b^T x$$

sous contraintes

$$A^T x \le c.$$

C'est aussi un problème d'optimisation linéaire

Calculons son dual...
Fonction Lagrangienne :

$$\begin{aligned} L(x,\mu) &= -b^T x + \mu^T (A^T x - c) \\ &= (-b + A\mu)^T x - \mu^T c \end{aligned}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dualité en optimisation linéaire

Pour qu’elle soit bornée, il faut

$$-b + A\mu = 0$$

Dualité en optimisation linéaire

Ainsi,

$$L(x,\mu) = -\mu^T c \quad \forall x$$

et donc

$$q(\mu) = -\mu^T c.$$

Le problème dual s'écrit

$$\max_{\mu} -\mu^T c$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ A\mu &= b. \end{aligned}$$

Dualité en optimisation linéaire

ou encore

$$\min_x x^T c$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &= b. \end{aligned}$$

C'est le problème de départ

Dualité en optimisation linéaire

Soit le programme linéaire suivant

$$\min_x c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 & = & b_1 \\ A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 & \leq & b_2 \\ A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 & \geq & b_3 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 0 \\ x_3 & \in & \mathbb{R}^{n_3} \end{array}$$

Dualité en optimisation linéaire

Le dual de ce problème est

$$\max_{\gamma} \gamma^T b = \gamma_1^T b_1 + \gamma_2^T b_2 + \gamma_3^T b_3$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \gamma_1 & \in & \mathbb{R}^m \\
 & \gamma_2 & \leq & 0 \\
 & \gamma_3 & \geq & 0 \\
(\gamma_1^T A_1 + \gamma_2^T A_2 + \gamma_3^T A_3 =) & \gamma^T A & \leq & c_1 \\
(\gamma_1^T B_1 + \gamma_2^T B_2 + \gamma_3^T B_3 =) & \gamma^T B & \geq & c_2 \\
(\gamma_1^T C_1 + \gamma_2^T C_2 + \gamma_3^T C_3 =) & \gamma^T C & = & c_3
\end{array}$$

avec $\gamma = (\gamma_1^T \ \gamma_2^T \ \gamma_3^T)^T$ et $A = (A_1^T \ A_2^T \ A_3^T)^T$

Dualité en optimisation linéaire

- A chaque contrainte du primal correspond une variable duale

Contrainte $=$	variable duale libre
Contrainte $\leq$	variable duale ≤ 0
Contrainte $\geq$	variable duale ≥ 0

- A chaque variable primale correspond une contrainte duale

variable primale ≥ 0	contrainte $\leq$
variable primale ≤ 0	contrainte $\geq$
variable primale libre	contrainte $=$

Dualité en optimisation linéaire

Le dual du dual est le primal *Soit un problème (primal) d'optimisation linéaire. Si l'on transforme son dual en un problème de minimisation, et que l'on calcule le dual de celui-ci, on obtient un problème équivalent au problème primal*

(p. 121)

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dualité en optimisation linéaire

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 3x_2 & & & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 6 \\ & & & & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \leq & 0 \\ & & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dualité en optimisation linéaire

Le problème dual est

$$\max 5\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\gamma_1 & & & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & \gamma_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & \gamma_3 & \leq & 0 \\
-\gamma_1 & + & 2\gamma_2 & & & \leq & 1 \\
3\gamma_1 & - & \gamma_2 & & & \geq & 2 \\
 & & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 3
\end{array}$$

C'est également un problème linéaire.

Dualité en optimisation linéaire

Ecrivons-le comme un problème de minimisation, et renommons les variables x.

$$\min -5x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & & & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_3 & \leq & 0 \\
x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & -1 \\
-3x_1 & + & x_2 & & & \leq & -2 \\
 & & -3x_2 & - & x_3 & = & -3
\end{array}$$

On peut donc calculer sont dual.

Dualité en optimisation linéaire

$$\max -\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\gamma_1 & - & 3\gamma_2 & & & = & -5 \\
-2\gamma_1 & + & \gamma_2 & - & 3\gamma_3 & \leq & -6 \\
 & & & - & \gamma_3 & \geq & -4 \\
\gamma_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & \gamma_2 & & & \leq & 0 \\
 & & & & \gamma_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

C'est le problème de départ