

# Introduction à l'optimisation et à la recherche opérationnelle

Michel Bierlaire

Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC



# Recherche opérationnelle: historique

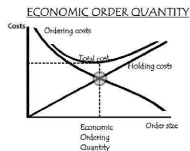
Daniel Bernoulli (1700-1782)

Mesure du risque, utilité



Harris (1913)

Gestion de stock, solution optimale



# Recherche opérationnelle: historique

Patrick Blackett (1897–1974)

- Opérations militaires
- Organisation des convois



George Dantzig (1914–2005)

Algorithme du simplexe (1945)



# Concepts clés

## Modélisation

Traduction de problèmes réels en équations mathématiques

## Optimisation

Identification de la meilleure configuration possible d'un système

## Simulation

Reproduction du fonctionnement d'un système complexe par un ordinateur



# Problèmes concrets dans notre laboratoire

## Opérations aériennes

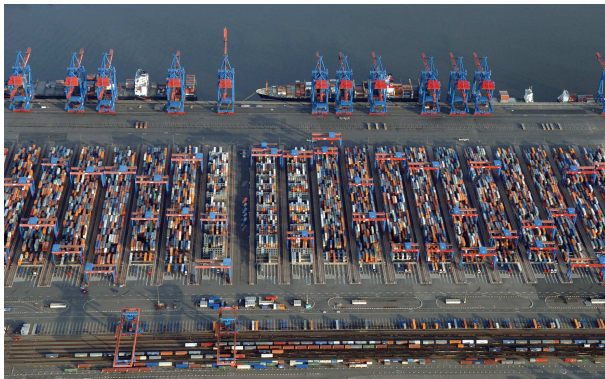


- Affectation des équipages
- Réorganisation après un événement majeur

# Problèmes concrets dans notre laboratoire

## Opérations portuaires

- Port de Gioia Tauro, Italie.
- Port de Ras-Al-Khaima, Emirats Arabes Unis.



# Problèmes concrets dans notre laboratoire

## Trafic urbain

- Optimisation des feux de circulation
- Réduction de la congestion



# Problèmes concrets dans notre laboratoire

## Tournées de véhicules

- Bus scolaires
- Livraison rapide de colis
- Collecte de déchets recyclables





# Problèmes concrets dans notre laboratoire

## Horaires des trains

- Horaires adaptés à la demande
- Horaires en cas d'incidents majeurs



|           |        |                   |                  |                   |  |                   |
|-----------|--------|-------------------|------------------|-------------------|--|-------------------|
|           | 18. 00 | Wankdorf          | Lyss             |                   |  | BIEL / BIÈRE      |
|           | 18. 02 | Zürich HB         | Zürich Flughafen | Winterthur        |  | ROMANSHOF         |
|           | 18. 02 | Felsenau Tiefenau | Worb/laufen      |                   |  | UNTERZOLLEN       |
|           | 18. 02 | Ausserholligen    | Kehrsatz         |                   |  | BELP              |
|           | 18. 04 | Thun              | Spiez            | Interlaken West   |  | INTERLAKEN        |
|           | 18. 04 | Olten             |                  |                   |  | BASEL STADT       |
|           | 18. 04 | Fribourg          | Romont           | Lausanne Geneve   |  | GENEVE - AEROPORT |
| leExpress | 18. 05 | Jegenstorf        | Bätterkinden     | Biberist          |  | SOLOTHURNE        |
|           | 18. 06 | Ausserholligen    | Köniz            |                   |  | SCHWARZENBACH     |
|           | 18. 07 | Thun              | Spiez            | Visp              |  | BRIG              |
|           | 18. 07 | Burgdorf          | Berzogenbuchsee  | Langenthal        |  | OLTEN             |
|           | 18. 08 | Worb/laufen       |                  |                   |  | BOLLIGEN          |
|           | 18. 08 | Bümpliz Nord      | Birmen Westholde | Elmrossen Kerzers |  | NEUCHÂTEL         |
| Express   | 18. 12 | Münchenbuchsee    | Lyss             |                   |  | BIEL / BIÈRE      |
|           | 18. 12 | Wankdorf          | Gümligen         | Konolfingen       |  | LANGNAU           |

# Organisation du cours

## Six thèmes

- 1 Optimisation linéaire — Introduction
- 2 Algorithme du simplexe
- 3 Réseaux et transbordement
- 4 Plus court chemin et dualité
- 5 Optimisation en nombres entiers — Branch and bound
- 6 Optimisation non linéaire sans contrainte — Méthode de Newton et recherche linéaire



# Chaque thème : deux semaines

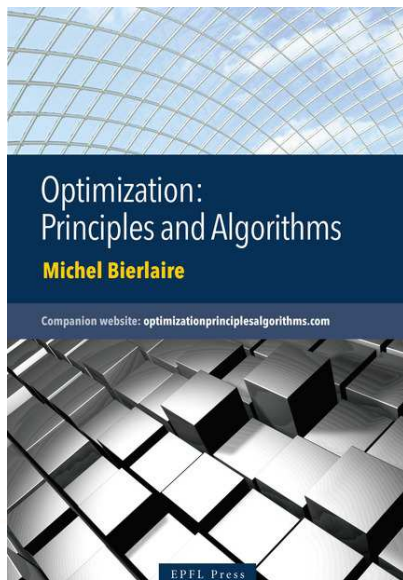
## Semaine 1 : auto-apprentissage

- Lecture des chapitres concernés
- Grille de lecture
- Pas de cours ex-cathedra, pas d'encadrement

## Semaine 2 : réponses aux questions et exemples

- Les questions doivent être posées sur moodle avant le mercredi soir
- Cours interactif avec exemples
- Pas de transparents





## Optimum

(du latin *optimus*, le meilleur) Etat, degré de développement de quelque chose jugé le plus favorable au regard de circonstances données

- Pour obtenir une définition plus formelle :

Modélisation mathématique

# Introduction

## Modèle mathématique

Représentation mathématique d'un phénomène physique, économique, humain, etc., réalisée afin de pouvoir mieux étudier celui-ci.

## Trois éléments

- 1 Variables de décision :  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

- 2 Fonction objectif :  $f(x) \in \mathbb{R}$
- 3 Contraintes:  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$

# Projectile

## Problème

- Un projectile est lancé verticalement à la vitesse de 50 mètres par seconde, en l'absence de vent.
- Après combien de temps et à quelle altitude commencera-t-il à retomber ?

## Variable de décision

$x$  = nombre de secondes écoulées depuis le départ du projectile.



# Projectile

## Fonction objectif

Altitude :

$$f(x) = -\frac{g}{2}x^2 + v_0x + x_0 = -\frac{9.81}{2}x^2 + 50x,$$

où  $g = 9.81$ ,  $v_0 = 50$  et  $x_0 = 0$

## Contrainte

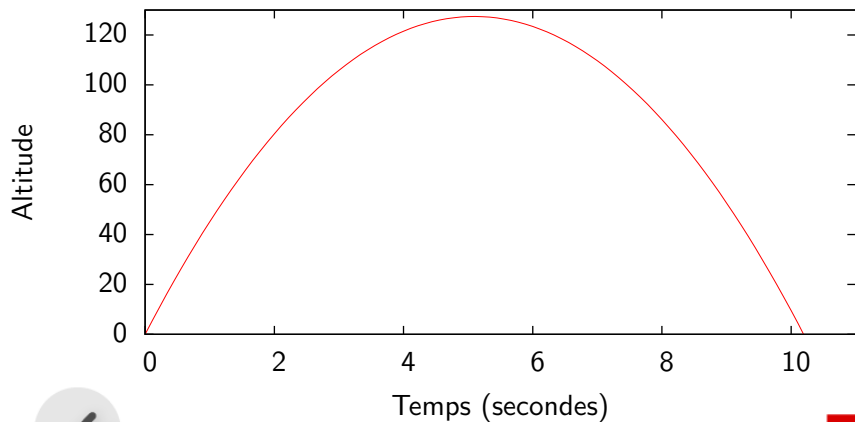
$x \geq 0$ .

## Problème d'optimisation

$$\max_{x \in \mathbb{R}^+} -\frac{9.81}{2}x^2 + 50x.$$



# Projectile

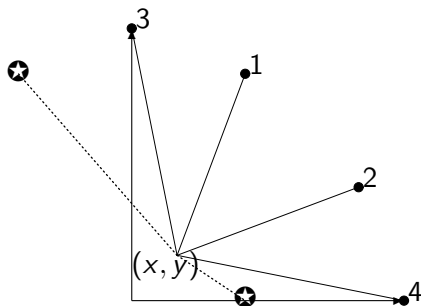


## Problème

- Positionnement d'une antenne
- Connexion de 4 nouveaux clients
- Priorité aux meilleurs clients
- Antennes existantes :  $(-5,10)$  et  $(5,0)$
- Interdiction de placer la nouvelle à moins de 10 km des antennes existantes



| Client | Coord. | Heures |
|--------|--------|--------|
| 1      | (5,10) | 200    |
| 2      | (10,5) | 150    |
| 3      | (0,12) | 200    |
| 4      | (12,0) | 300    |



$$\begin{aligned} \min_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2) = & 200\sqrt{(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 10)^2} + \\ & 150\sqrt{(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 5)^2} + \\ & 200\sqrt{x_1^2 + (x_2 - 12)^2} + \\ & 300\sqrt{(x_1 - 12)^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 + 5)^2 + (x_2 - 10)^2} & \geq 10 \\ \sqrt{(x_1 - 5)^2 + x_2^2} & \geq 10. \end{aligned}$$

# Château Laup-Himum

## Contexte

Produit du vin rosé et du vin rouge en achetant le raisin à des producteurs locaux.

- Achat : maximum 1 tonne de pinot à 3€/kilo.
- Vinification rosé : coût 2€ par kilo de raisin
- Vinification rouge (pinot noir) : coût 3.50€ par kilo de raisin.
- Prix de vente rosé : 15€/litre moins 2€ par centaine de litres produits.
- Prix de vente rouge : 23€/litre moins 1€ par centaine de litres produits.

# Château Laup-Himum

## Données

| Production | Prix rosé par l. | Prix rouge par l. |
|------------|------------------|-------------------|
| 100 l.     | 13 €             | 22 €              |
| 200 l.     | 11 €             | 21 €              |

## Question

Comment le Château doit-il s'organiser pour optimiser son gain, en sachant qu'un kilo de raisin produit 1 litre de vin ?

La démarche de modélisation se passe en trois étapes.



# Château Laup-Himum

## Variables de décision

- $x_1$  litres de vin rosé à produire par année,
- $x_2$  litres de pinot noir à produire,
- $x_3$  nombre de kilos de raisins à acheter.

## Fonction objectif

### Optimisation du gain

- Gain sur le litre de rosé (en €):  $15 - \frac{2}{100}x_1$
- Gain sur le litre de rouge (en €):  $23 - \frac{1}{100}x_2$ .



# Château Laup-Himum

## Fonction objectif

- Chiffre d'affaire

$$x_1(15 - \frac{2}{100}x_1) + x_2(23 - \frac{1}{100}x_2).$$

- Achat du raisin :  $3x_3$
- Vinification du rosé :  $2x_1$
- Vinification du rouge :  $3.5x_2$
- Frais totaux:

$$2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3.$$



# Château Laup-Himum

## Fonction objectif

$$x_1(15 - \frac{2}{100}x_1) + x_2(23 - \frac{1}{100}x_2) - (2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3).$$

## Contraintes

- Achat de maximum 1 tonne de raisin au vigneron,

$$x_3 \leq 1000.$$

- Limite de production

$$x_1 + x_2 \leq x_3.$$

# Château Laup-Himum

Contraintes triviales mais indispensables

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

# Château Laupt-Himum

## Problème d'optimisation

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3} f(x) = x_1 \left( 15 - \frac{2}{100} x_1 \right) + x_2 \left( 23 - \frac{1}{100} x_2 \right) - (2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3)$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq x_3 \\ x_3 &\leq 1000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

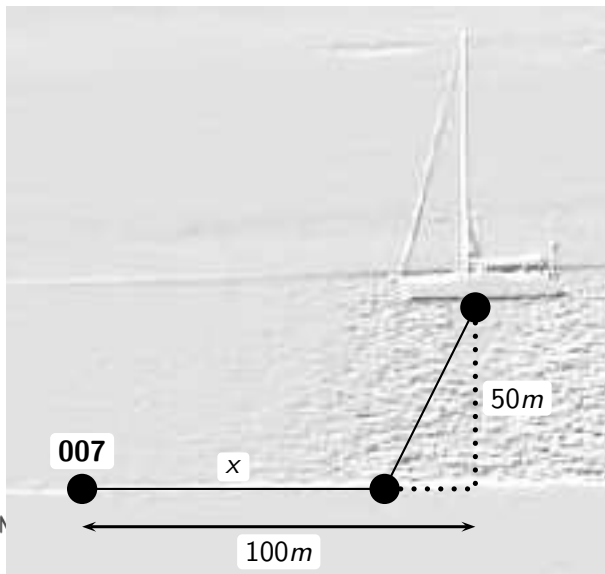
# James Bond 007

## Mission

- Désamorcer une bombe nucléaire sur un yacht
- Yacht amarré à 50 mètres du rivage
- James Bond se trouve à 100 mètres du point le plus proche du yacht sur la plage
- Course : 18km/h. Nage : 10km/h
- Temps de désamorçage : 30 secondes
- Explosion dans 65 secondes
- James Bond pourra-t-il sauver le monde libre ?



# James Bond 007



## Modèle mathématique

$$\min_x f(x) = \frac{x}{5} + 0.36\sqrt{50^2 + (100 - x)^2}.$$

sous contrainte

$$\begin{aligned}x &\geq 0 \\x &\leq 100.\end{aligned}$$

## Note

$$f(0) = 40.25, f(100) = 38.$$





## Problème

- Indiana Jones est bloqué face à une immense salle remplie de Pseudechis Porphyriacus, des serpents venimeux.
- La salle est longue de 10 mètres et haute de 5 mètres.
- Il doit passer par-dessus, mais le toit est fragile.

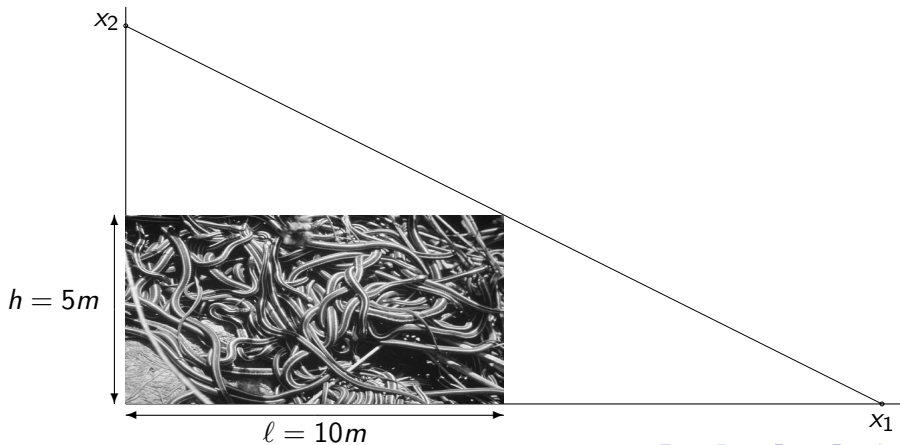


## Problème (suite)

- Il place l'extrémité d'une échelle sur le sol, bloquée par un rocher, l'appuie sur le mur, et l'utilise pour atteindre l'autre extrémité de la salle. Arrivé là, il utilise son fouet pour redescendre sur le sol, de l'autre côté de la salle.
- Où doit-il placer l'extrémité de l'échelle sur le sol, pour que la longueur de l'échelle utilisée soit la plus petite possible, et que celle-ci risque moins de rompre sous son poids ?



# INDIANA JONES





La démarche de modélisation procède en trois étapes.

### Variables de décision

- $x_1$  est la position de l'extrémité de l'échelle sur le sol,
- $x_2$  est la hauteur de l'autre extrémité de l'échelle, à l'autre bout de la salle.

### Fonction objectif

$$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$



## Contraintes

L'échelle s'appuie exactement sur le bord du mur de la salle. En utilisant des triangles semblables, cette contrainte peut s'écrire

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h}{x_1 - l} = \frac{x_2 - h}{l}$$

ou encore

$$x_1 x_2 - h x_1 - l x_2 = 0.$$

Les extrémités de l'échelle doivent se trouver hors de la salle

$$x_1 \geq l \text{ et } x_2 \geq h.$$



## Problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}x_1 x_2 - h x_1 - l x_2 &= 0 \\x_1 &\geq l \\x_2 &\geq h.\end{aligned}$$

## Problème

Fabricants de jouets en bois : soldats et trains

- Prix de vente : soldats 27 €, trains 21 €
- Matériel brut : soldats 10 €, trains 9 €
- Coûts généraux : soldats 14 €, trains 10 €
- Menuiserie : soldats 1h, trains 1h
- Finissage : soldats 2h, trains 1h
- Main d'oeuvre disponible : menuiserie 80h, finissage 100h
- Maximum de 40 soldats

## Modèle mathématique

$$\max_x f(x) = 3x_1 + 2x_2,$$

sous contraintes

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

# Transformations du problème

## Equivalence

Deux problèmes d'optimisation  $P_1$  et  $P_2$  sont dits *équivalents* si

- l'on peut construire un point admissible de  $P_2$  à partir d'un point admissible de  $P_1$  (et réciproquement),
- avec la même valeur pour la fonction objectif.

En particulier, les deux problèmes ont le même coût optimal, et on peut construire une solution optimale de  $P_2$  à partir d'une solution optimale de  $P_1$  (et réciproquement).



# Transformations du problème

## Constante

$$\operatorname{argmin}_{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) = \operatorname{argmin}_{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n} (f(x) + c) \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

et

$$\min_{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n} (f(x) + c) = c + \min_{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

## Minimum - Maximum

$$\max_x f(x) \iff - \min_x -f(x).$$

$$\min_x f(x) \iff - \max_x -f(x).$$



# Transformations du problème

## Inégalités

$$g(x) \leq 0 \iff -g(x) \geq 0.$$

## Egalité - Inégalités

$$g(x) = 0 \iff \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

## Variables non négatives

$$x = x^+ - x^-, \text{ avec } x^+ \geq 0 \text{ et } x^- \geq 0.$$

# Transformations du problème

## Changement de variable

$$x = \tilde{x} + a$$

transforme la contrainte  $x \geq a$  en

$$\tilde{x} \geq 0.$$

# Transformation du problème

$$\max_{x,y} -x^2 + \sin y$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}6x - y^2 &\geq 1 \\x^2 + y^2 &= 3 \\x &\geq 2 \\y &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

## Exigences

- Minimisation
- Variables non négatives
- Contraintes d'inégalité inférieure

# Transformations du problème

$$- \min_{\tilde{x}, y^+, y^-} (\tilde{x} + 2)^2 - \sin(y^+ - y^-)$$

sous contraintes

$$-6(\tilde{x} + 2) + (y^+ - y^-)^2 + 1 \leq 0$$

$$(\tilde{x} + 2)^2 + (y^+ - y^-)^2 - 3 \leq 0$$

$$-(\tilde{x} + 2)^2 - (y^+ - y^-)^2 + 3 \leq 0$$

$$\tilde{x} \geq 0$$

$$y^+ \geq 0$$

$$y^- \geq 0$$

# Variables d'écart

## Variable d'écart

Une variable d'écart est une variable de décision introduite dans un problème d'optimisation afin de transformer une contrainte d'inégalité en une contrainte d'égalité.

$$g(x) \leq 0 \iff g(x) + z^2 = 0 \iff \begin{cases} g(x) + y = 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

# Hypothèses de travail

## Hypothèses dans le cadre de ce cours

- continuité
- différentiabilité
- déterminisme

opt. en nombres entiers

opt. non différentiable

opt. stochastique

