Algorithme du simplexe – corrigé (13 octobre 2017)

Solution de la question 1:

1. Le domaine admissible est représenté en gris sur la Figure 1.

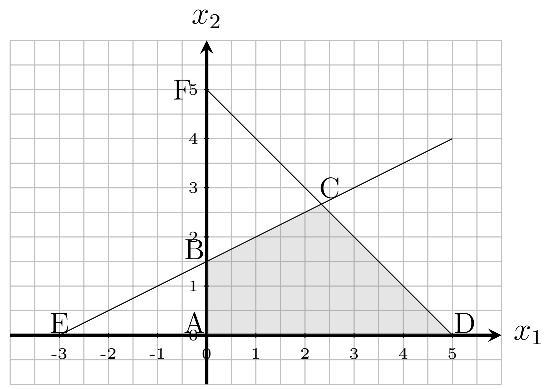

FIGURE 1 – Domaine admissible

2. On cherche les solutions $(x_1,\, x_2)$ qui vérifient les deux équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 5, \\
-x_1 + 2x_2 &= 3.
\end{aligned}
$$

En sommant les deux contraintes, on obtient comme valeur pour x_2 :

$$
\begin{aligned}
3x_2 &= 8, \\
x_2 &= \frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

En substituant x_2 par sa valeur dans la première équation ci-dessus, on obtient pour x_1 :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 - \frac{8}{3}, \\
x_1 &= \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

Le seul point admissible lorsque les deux contraintes sont actives est donc le sommet (7/3, 8/3). Il s'agit du point C sur la Figure 1.

3. Les solutions de base correspondent aux intersections des différentes contraintes :

A	$(0, 0)$	D	$(5, 0)$
B	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	E	$(-3, 0)$
C	$\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$	F	$(0, 5)$

4. Les solutions de base admissibles correspondent aux 4 sommets :

A	$(0, 0)$	C	$\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$
B	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	D	$(5, 0)$

5. Comme illustré à la Figure 2, la solution optimale correspond au sommet D et est donc définie par le point (5, 0).

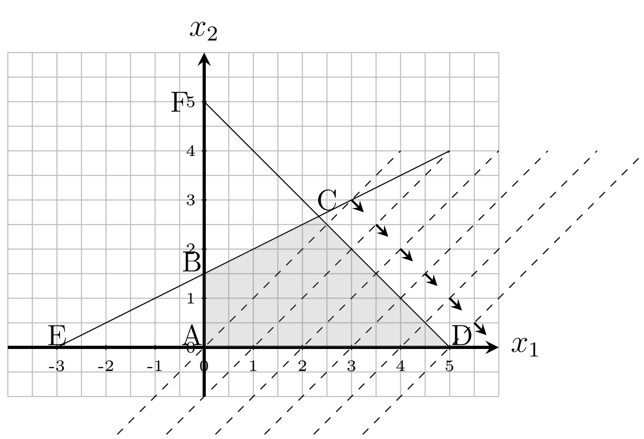

Figure 2 – Solution optimale

Solution de la question 2:

1. Si les indices de base sont 2,3, et 6, la matrice de base est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dont l'inverse s'écrit :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur b étant $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$, les variables de base valent

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Cette solution est admissible car elle satisfait $B^{-1}b \geq 0$. Les variable hors-base x_1, x_4, x_5 valent par définition 0.

2. Calculons les coût réduits pour les variable hors-base.

— Le coût réduit associé à la variable hors-base x_1 est donné par

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1$$

où c_1 est le premier élément du vecteur c, A_1 correspond à la première colonne de la matrice A, B^{-1} correspond à la matrice calculée ci-dessus et c_B correspond au vecteur c avec uniquement les éléments correspondants aux éléments en base.
On a donc :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de calculer $c_B^T B^{-1} A_1$:

$$\begin{aligned}
c_B^T B^{-1} A_1 &= c_B^T \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= c_B^T \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Le coût réduit associé à la variable hors-base x_1 vaut donc :

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = 4 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{21}{5} > 0$$

— Le coût réduit associé à la variable hors-base x_4 est donné par

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4$$

où c_4 est le quatrième élément du vecteur c, A_4 correspond à la quatrième colonne de la matrice A, B^{-1} correspond à la matrice calculée ci-dessus et c_B correspond au vecteur c avec uniquement les éléments correspondants aux éléments en base.
Le vecteur c_B est le même que celui donné plus haut. On a donc :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de calculer $c_B^T B^{-1} A_1$:

$$\begin{aligned}
c_B^T B^{-1} A_1 &= c_B^T \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= c_B^T \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Le coût réduit associé à la variable hors-base x_4 vaut donc :

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 0 - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5} > 0$$

— Le coût réduit associé à la variable hors-base x_5 est donné par

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B^T B^{-1} A_5$$

où c_5 est le cinquième élément du vecteur c, A_5 correspond à la cinquième colonne de la matrice A, B^{-1} correspond à la matrice calculée ci-dessus et c_B correspond au vecteur c avec uniquement les éléments correspondants aux éléments en base.
Le vecteur c_B est le même que celui donné plus haut. On a donc :

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de calculer $c_B^T B^{-1} A_1$:

$$\begin{aligned} c_B^T B^{-1} A_1 &= c_B^T \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= c_B^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le coût réduit associé à la variable hors-base x_5 vaut donc :

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B^T B^{-1} A_5 = 3 - 0 = 3 > 0$$

Tous les coûts réduits des variables hors-base sont positifs. La solution de base d'indices 2,3 et 6 correspond donc à l'optimum du problème.

Solution de la question 3:

1. Le domaine admissible est représenté en gris sur la Figure 3.

2. Pour écrire le problème en forme standard, on introduit les variables d'écart x_3 et x_4 :

$$\min -x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4 \tag{2}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

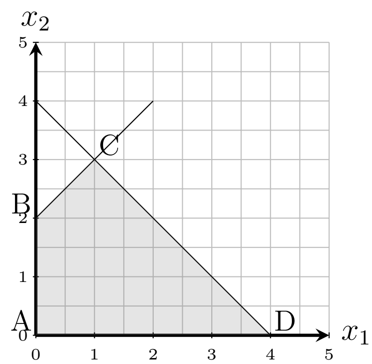

FIGURE 3 – Domaine admissible

3. Comme indiqué dans la donnée, on va commencer par le point $(0, 0)$. Il faut donc vérifier que ce point est une solution de base admissible. Si $x_1 = x_2 = 0$, cela implique que les contraintes (1) et (2) deviennent :

$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 4$$

Le point $(0, 0)$ correspond donc au point $(0, 0, 2, 4)$. Toutes les variables sont positives, c'est donc une solution de base admissible. Il est dénoté par A sur la figure 3.
Note : il est aussi possible de vérifier que $B^{-1}b \geq 0$.
Maintenant que nous avons un point de départ, il est possible de commencer les itérations de l'algorithme du simplexe. Mais nous identifions tout d'abord la matrice A, le vecteur b et le vecteur c :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Première itération

On identifie tout d'abord les variables en base et hors-base.
Variables en base : x_3 et x_4
Variables hors base : x_1 et x_2

Les vecteurs x et x_B (x_B correspond au vecteur x avec uniquement les composantes correspondant aux variables en base) sont donc donnés par

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de calculer la valeur de la fonction objectif :

$$c_B^T x_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

La fonction objectif qu'on essaie de minimiser vaut, actuellement, 0. La prochaine étape de l'algorithme est de calculer les coûts réduits associés aux variables hors-base. Pour cela, on a besoin de la matrice B^{-1}. Les matrices B et B^{-1} sont donc données par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a maintenant tous les éléments pour calculer les coûts réduits :

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 \\
&= -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -1 - 0 = -1 \\
&\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{candidat}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_2 &= c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 \\
&= -2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -2 - 0 = -2 \\
&\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{candidat}}
\end{aligned}$$

Les coûts réduits sont négatifs pour les deux variables hors-base x_1 et x_2. Cela signifie que ces deux variables peuvent rentrer dans la base.

On choisit de faire rentrer x_1 dans la base. Il faut donc maintenant calculer la direction de base que l'algorithme va emprunter. Cette direction est donnée par :

$$d_1 = \begin{pmatrix} d_{B_1} \\ d_{N_1} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc calculer les deux vecteurs composant la direction à emprunter :

$$d_{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$
$$d_{B_1} = -B^{-1}A_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

La direction vaut donc :

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = Pd_1$$

Où P est la matrice de permutation. Cette direction est représentée sur la Figure 4.

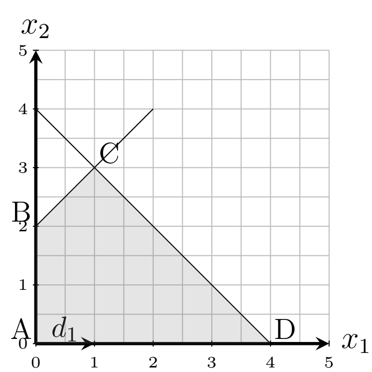

FIGURE 4 – Direction de base admissible correspondant à x_1

Il nous faut maintenant calculer la distance pour le pas. Pour chaque variable en base, on obtient :

$$\theta_i = \frac{x_i}{-d_i}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \frac{x_3}{-d_3} = \frac{2}{-1} = -2,\\ \theta_4 &= \frac{x_4}{-d_4} = \frac{4}{-(-1)} = 4.\end{aligned}$$

Le pas maximum est donc de 4. (Il n'est pas possible d'avoir un pas négatif.) Lors de cette itération, la variable x_1 va entrer en base et la variable x_4 va sortir de la base. On s'attend à avoir une diminution de la fonction objectif valant :

$$\theta_4 \times \bar{c}_1 = 4 \times -1 = -4$$

Deuxième itération

Les étapes pour cette itération sont les mêmes que pour la première itération. On identifie tout d'abord les variables en base et hors-base.

Variables en base : x_1 et x_3

Variables hors base : x_2 et x_4

Les vecteurs x et x_B sont donc donnés par

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de calculer la valeur de la fonction objectif :

$$c_B^T x_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -4$$

La fonction objectif qu'on essaie de minimiser vaut maintenant -4. Cela correspond bien à la diminution qui a été calculée. La prochaine étape de l'algorithme est de calculer les coûts réduits associés aux variables hors-base. Pour cela, on a besoin de la matrice B^{-1}. Les matrices B et B^{-1} sont donc données par :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a maintenant tous les éléments pour calculer les coûts réduits :

$$\begin{aligned}\bar{c}_2 &= c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 \\ &= -2 - \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 - (-1) = -1 \\ &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{candidat}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_4 &= c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \\ &= 0 - \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 - (-1) = 1 \\ &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ne peut pas être candidat}\end{aligned}$$

Cette fois, seulement le coût réduit de la variable hors-base x_2 est négatif. Nous n' avons qu'un seul candidat. Il faut donc maintenant calculer la direction de base que l'algorithme va emprunter. Cette direction est donnée par :

$$d_2 = \begin{pmatrix} d_{B_2} \\ d_{N_2} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc calculer les deux vecteurs composant la direction à emprunter :

$$\begin{aligned}d_{N_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ d_4 \end{pmatrix} \\ d_{B_2} &= -B^{-1} A_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La direction vaut donc :

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = P d_1$$

Où P est la matrice de permutation. Cette direction est représentée sur la Figure 5.

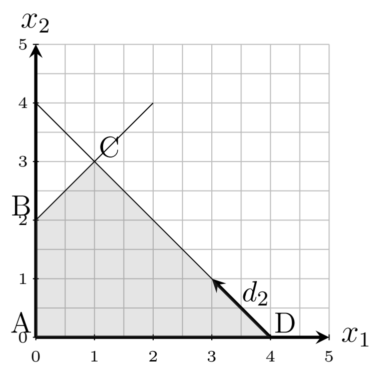

FIGURE 5 – Direction de base admissible correspondant à x_2

Il nous faut maintenant calculer la distance pour le pas. Pour chaque variable en base, on obtient :

$$\theta_i = \frac{x_i}{-d_i}$$

ce qui donne :

$$\theta_1 = \frac{x_1}{-d_1} = \frac{4}{-(-1)} = 4.$$

$$\theta_3 = \frac{x_3}{-d_3} = \frac{6}{-(-2)} = 3,$$

Le pas maximum est donc de 3. Lors de cette itération, la variable x_2 va entrer en base et la variable x_3 va sortir de la base. On s'attend à avoir une diminution de la fonction objectif valant :

$$\theta_3 \times \bar{c}_2 = 3 \times -1 = -3$$

Troisième itération

On identifie tout d'abord les variables en base et hors-base.

Variables en base : x_1 et x_2

Variables hors base : x_3 et x_4

Les vecteurs x et x_B sont donc donnés par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de calculer la valeur de la fonction objectif :

$$c_B^T x_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -7$$

La fonction objectif qu'on essaie de minimiser vaut maintenant -7. Cela correspond bien à la diminution qui a été calculée. La prochaine étape de l'algorithme est de calculer les coûts réduits associés aux variables hors-base. Pour cela, on a besoin de la matrice B^{-1}. Les matrices B et B^{-1} sont donc données par :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a maintenant tous les éléments pour calculer les coûts réduits :

$$\begin{aligned}
\bar{c}_3 &= c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 \\
&= 0 - \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \\
&\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ne peut pas être candidat}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_4 &= c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \\
&= 0 - \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 0 - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \\
&\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ne peut pas être candidat}
\end{aligned}$$

Puisque les coûts réduits des deux variables hors-base sont positif, cela signifie que l'optimum a été atteint. La solution du problème

$$\min -x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4 \tag{4}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

est donnée par

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la fonction objectif vaut -7. La Figure 6 montre la résolution graphique de ce problème. On obtient bien la même solution.

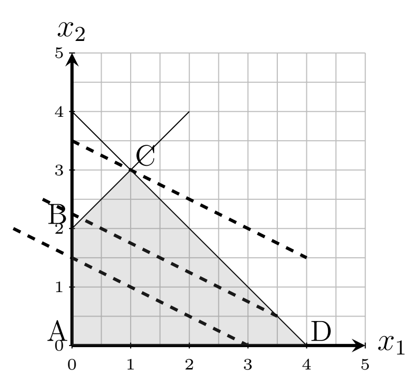

Figure 6 – Résolution graphique

Solution de la question 4:

La bonne réponse est la réponse (4).

Les variables x_1 et s_1 sont les seules variables avec des coûts réduits nuls. Cela signifie qu'elles sont en base. A l'inverse, les variables x_2,x_3, et s_2 ont des coûts réduits différents de zéro. Ce sont les variables hors-base. Elles sont donc égales à zéro.

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, donc le tableau est optimal. La valeur de la fonction objectif est 11.