Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Algorithme du simplexe (20 octobre 2017)

Question 1:

Considérer le problème d'optimisation suivant :

$$\min -3x_1 + 4x_2$$

sous contraintes

$$x_1 + x_2 \geq 4 \tag{1}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 18 \tag{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3}$$

1. Représenter graphiquement le domaine admissible et résoudre par la méthode graphique.
2. Résoudre en utilisant la méthode du simplexe à deux phases avec la méthode du tableau.

Question 2:

Stefano, Gael et Chao, trois amis étudiants ont décidé de participer au Raid 4L Trophy, un rallye raid aventure 100% étudiant se déroulant sur les pistes marocaines. Pour financer leur voyage, ils ont décidé de vendre deux types de biscuits faits maisons : sucrés et salés. Les trois étudiants ont seulement une semaine pour confectionner leur biscuits. Leur emploi du temps est varié et ensemble ils ont estimé qu'ils ne peuvent consacrer plus de 50 heures à la confection des biscuits. Les heures nécessaires à la préparation de chaque paquet de biscuits sont reprises dans la table ci-dessous :

	Sucrés	Salés
Heures par paquet	1h	2h
Prix de vente du paquet	3 frs	4 frs

De plus, compte tenu des ingrédients à disposition, ils savent qu'ils ne peuvent pas faire plus de 20 paquets de biscuits sucrés et 30 paquets de biscuits salés. On suppose que les trois amis vendent l'ensemble des biscuits cuisinés.

1. Modéliser le problème comme un problème d'optimisation linéaire pour déterminer le nombre de paquets de biscuits sucrés et salés qui maximisent les revenus de la vente des biscuits. Préciser explicitement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.
2. La phase I est-elle nécessaire ? Pourquoi ?
3. Résoudre avec l'algorithme du simplexe en utilisant la méthode du tableau.

Question 3:

Voici un tableau du simplexe obtenu en minimisant une fonction objectif soumise à 3 contraintes. les variables x_1 et x_2 sont les variables du problème original, et les variables e_1, e_2 et e_3 sont des variables d'écart. On a volontairement omis de marqué les variables en base sur la gauche du tableau.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
?	$-2/3$	0	f	0	$1/6$	46
?	$-1/8$	0	0	1	$5/2$	k
?	b	1	g	i	$-1/6$	4
	c	e	h	j	$1/2$	m

Le vecteur $\boldsymbol{c}$ est donné par :

$$\boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} a & d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner les variables de base de ce tableau.
2. La structure même du tableau force certains des paramètres à prendre une valeur unique et précise. Indiquer quels sont ces paramètres et déterminer leurs valeurs.
3. À quelles conditions doivent répondre les paramètres pour que la solution de base associée à ce tableau soit dégénérée ?
4. À quelles conditions doivent répondre les paramètres pour que la solution de base associée à ce tableau soit l'unique solution optimale du problème d'optimisation linéaire ?

5. À quelles conditions doivent répondre les paramètres pour que le tableau soit optimal mais que le problème admette plusieurs solutions optimales ?
6. À quelles conditions doivent répondre les paramètres pour que le problème d'optimisation linéaire ne soit pas borné ?

Question 4 – QCM:

1. Laquelle des affirmations suivantes, concernant une solution de base admissible, est-elle ***correcte*** pour un problème de minimisation ?
   (a) Si tous les coûts réduits sont négatifs, la solution est optimale.
   (b) Si la valeur des variables en base est négative, la solution est optimale.
   (c) Si les coûts réduits des variables hors base sont positifs, la solution est optimale.
2. Soit un problème de minimisation linéaire avec quatres variables $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$. Dans l'itération courante de l'algorithme du simplexe, on obtient le vecteur de coûts réduits $\bar{\boldsymbol{c}} = (-1, 0, 0, 0)^T$ et la partie supérieure de la dernière colonne du tableau du simplexe est donnée par $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (2, 4, 3)^T$. Dans ce cas,
   (a) la solution optimale a été trouvée,
   (b) la solution courante n'est pas admissible,
   (c) $x = (0, 2, 4, 3)^T$ est un sommet de la région admissible.