Dualité (17 novembre 2017)

## Question 1:

Compléter le tableau suivant :

| Primal | min | ? | Dual |
|---|---|---|---|
| contraintes | $\geq b_i$<br>$\leq b_i$<br>$= b_i$ | ?<br>?<br>? | variables |
| variables | $\geq 0$<br>$\leq 0$<br>libre | ?<br>?<br>? | contraintes |

## Question 2:

Ecrire le problème dual des problèmes d'optimisation linéaire suivants (sans les convertir en forme standard ou canonique) :

1.
$$\min x_1 - 4x_2 + 2x_3$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 4x_3 &= 16 \\ x_2 - x_3 &\leq 5 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R} \\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

2.

$$\min -4x_1 - 7x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -5x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 31 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 68 \\ x_1 + x_2 &\leq 122 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Question 3:

Ecrire le problème dual du problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min x_1 + 2x_2 + ... + nx_n$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n &\geq n \\ x_1, x_2, x_3, ..., x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

## Question 4:

Soit la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A^T = -A$, et le vector $c \in \mathbb{R}^n$. Prouver que le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min c^T x$$

sous contraintes

$$
\begin{aligned}
Ax &\geq -c, \\
x &\geq 0,
\end{aligned}
$$

est auto-dual, c'est-à-dire qu'il est son propre problème dual.

## Question 5:

Considérer le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min_{x \in R^2} -3x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\leq 2 \\
-x_1 + x_2 &\leq -3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

1. Ecrire la fonction lagrangienne.
2. Ecrire la fonction duale.
3. Ecrire le problème dual.
4. Représenter graphiquement le domaine admissible du problème primal.
5. Représenter graphiquement le domaine admissible du problème dual.