Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Dualité - corrigé (17 novembre 2017)

Question 1:

A chaque contrainte du primal correspond une variable duale :

- contrainte $\geq$ variable duale ≥ 0.
- contrainte $\leq$ variable duale ≤ 0,
- contrainte $=$ variable duale libre,

A chaque variable primale correspond une contrainte duale :

- variable primale ≥ 0 contrainte $\leq$,
- variable primale ≤ 0 contrainte $\geq$,
- variable primale libre contrainte $=$.

On peut dès lors compléter le tableau comme suit :

Primal	min	max	Dual
contraintes	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 libre	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 libre	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	contraintes

Question 2:

1. Le dual s'écrit :

$$\max 10y_1 + 16y_2 + 5y_3$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\leq 1 \\ y_1 + y_3 &= -4 \\ 4y_2 - y_3 &\geq 2 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\in \mathbb{R} \\ y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

2. Le dual s'écrit :

$$\max 16y_1 + 31y_2 + 24y_3 + 68y_4 + 122y_5$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -5y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 &\leq -4 \\ 4y_1 + 3x_2 + 2y_3 + 5y_4 + y_5 &\leq -7 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\leq 0. \end{aligned}$$

Question 3:

Le problème dual est

$$\max y_1 + 2y_2 + ... + ny_n$$

sous contraintes

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +... & +y_n & \leq 1 \\ & y_2 & +y_3 & +y_4 & +... & +y_n & \leq 2 \\ & & y_3 & +y_4 & +... & +y_n & \leq 3 \\ & & & y_4 & +... & +y_n & \leq 4 \\ & & & & ... & ...... & ... \\ & & & & & y_n & \leq n \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & ... & y_n & \geq 0 \end{array}$$

Question 4:

Le problème dual s'écrit :

$$\max -c^T y$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} A^T y &\leq c \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

On peut réécrire le problème en utilisant le fait que

1. $\max -f(y) \Leftrightarrow \min f(y)$,
2. $A^T = -A$.

On obtient :

$$\min c^T y$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -Ay &\leq c \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, en multipliant la contrainte d'inégalité par -1 et en renommant simplement la variable y par x, on obtient :

$$\min c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax &\geq -c \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

ce qui correspond bien au problème primal de départ.

Question 5:

1. Réécrivons le problème afin de n'avoir que des contraintes d'inégalité inférieure :

   $$\min_{x \in R^2} -3x_1 + 2x_2$$

   sous contraintes

   $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 + 3 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

La fonction lagrangienne s'écrit

$$\begin{aligned}L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) =& -3x_1 + 2x_2 + \mu_1(x_1 - x_2 - 2) + \mu_2(-x_1 + x_2 + 3)\\ &- \mu_3 x_1 - \mu_4 x_2\\ =&(-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)x_1 + (2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4)x_2\\ &- 2\mu_1 + 3\mu_2.\end{aligned}$$

2. Afin que cette fonction soit bornée en x, il faut imposer

$$\begin{aligned}-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 &= 0\\ 2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 &= 0,\end{aligned}$$

et la fonction duale s'écrit alors

$$q(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = -2\mu_1 + 3\mu_2.$$

3. Le problème dual s'écrit donc

$$\max -2\mu_1 + 3\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 &= 0\\ 2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 &= 0\\ \mu_1 &\geq 0\\ \mu_2 &\geq 0\\ \mu_3 &\geq 0\\ \mu_4 &\geq 0.\end{aligned}$$

En forme canonique, le problème dual s'écrit

$$\min 2\mu_1 - 3\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}-\mu_1 + \mu_2 &\leq -3\\ \mu_1 - \mu_2 &\leq 2\\ \mu_1 &\geq 0\\ \mu_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Notez que si on suit les règles du tableau de la question 1, le problème dual s'écrit

$$\max 2y_1 - 3y_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\leq -3 \\ -y_1 + y_2 &\leq 2 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $\mu_1 = -y_1$ et $\mu_2 = -y_2$, on obtient

$$\max -2\mu_1 + 3\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -\mu_1 + \mu_2 &\leq -3 \\ \mu_1 - \mu_2 &\leq 2 \\ -\mu_1 &\leq 0 \\ -\mu_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Finalement, en forme canonique, le problème dual s'écrit

$$\min 2\mu_1 - 3\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -\mu_1 + \mu_2 &\leq -3 \\ \mu_1 - \mu_2 &\leq 2 \\ \mu_1 &\geq 0 \\ \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

On obtient bien la même chose que précédemment.

4. Comme illustré à la Figure 1, le domaine admissible du problème primal est vide. En effet, $x_1 - x_2$ ne peut être en même temps inférieur à 2 et supérieur à 3.
5. Comme illustré à la Figure 2, le domaine admissible du problème dual est exactement le même que le domaine admissible du problème primal. Il est également vide.

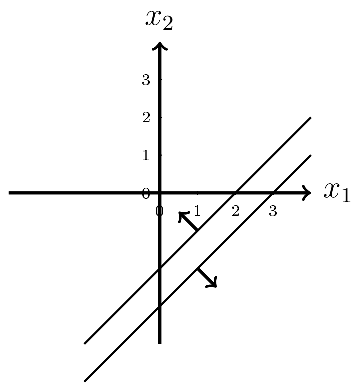

Figure 1 – Domaine admissible du problème primal.

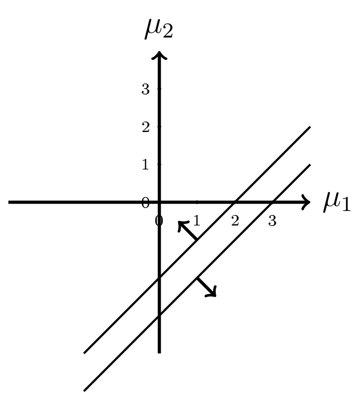

Figure 2 – Domaine admissible du problème dual.