

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Optimisation en nombres entiers (24 novembre 2017)

### Question 1:

Les membres du laboratoire TRANSP-OR doivent corriger les examens du cours de recherche opérationnelle. L'examen comporte cinq questions. Certaines questions abordent des thèmes identiques et les assistants ont remarqué que le temps de correction d'une question dépendait de la question corrigée précédemment. Le tableau ci-dessous indique les temps de correction. Le temps de correction  $t_{ij}$  est défini comme le nombre de minutes requises pour corriger la question  $Q_j$  lorsque qu'elle est corrigée après la question  $Q_i$ . *Par exemple, il faut 12 minutes pour corriger la question  $Q_2$  lorsqu'elle est corrigée après la question  $Q_1$  alors qu'il en faut 20 si elle est corrigée après la question  $Q_4$ .* L'objectif du problème est de trouver l'ordre dans lequel les questions doivent être corrigées (ordre qui sera répété pour chaque examen) afin de minimiser le temps total de correction de l'examen.

Questions	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$
$Q_1$	-	12	8	16	12
$Q_2$	16	-	16	20	20
$Q_3$	20	12	-	16	16
$Q_4$	12	20	4	-	24
$Q_5$	20	16	8	8	-

1. Modéliser ce problème sous forme de graphe (définir les noeuds et les arcs, ainsi que leurs attributs).
2. Présenter une solution admissible du problème sur le graphe et identifier les caractéristiques de cette solution.
3. Comment peut-on décrire la solution optimale ?
4. Ecrire le modèle mathématique qui correspond à ce problème.

### Question 2:

Le gérant du célèbre bar *Satellite* a décidé de produire 2 types de bière : la Sat'blonde et la Sat'brune. Trois ingrédients sont nécessaires à la fabrication des deux bières : du maïs , du houblon et du malt. Les quantités requises (par tonneau de bière) sont les suivantes :

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Optimisation en nombres entiers (24 novembre 2017)

<i>Bière</i>	Maïs	Houblon	Malt
Sat'blonde	2.5 Kg	125 g	17.5 Kg
Sat'brune	7.5 Kg	125 g	10 Kg

Le gérant dispose de 200 kg de maïs, de 4.5 kg de houblon et de 580 kg de malt. De plus, il a calculé qu'il obtiendrait un bénéfice de 30 CHF par tonneau de Sat'blonde et un bénéfice de 50 CHF par tonneau de Sat'brune.

Formuler le problème visant à trouver le nombre de tonneaux de chaque bière (Sat'blonde et Sat'brune) qu'il faut produire afin de maximiser son bénéfice.

### Question 3:

Le gérant du *Satellite* doit également choisir une sélection de bières Leffe parmi l'ensemble des bières Leffe suivantes :

<i>Bière</i>	% d'alcool	Année	Couleur
Leffe Brune	6,5%	1952	Brune
Leffe Triple	8.5%	1954	Blonde
Leffe Vieille Cuvée	8,2%	1956	Ambrée
Leffe Blonde	6,6%	1967	Blonde
Leffe Radieuse	8,2%	1973	Ambrée
Leffe Rituel 9°	9%	2006	Blonde
Leffe Ruby	5%	2011	Rouge
Leffe Nectar (au miel)	5,5%	2012	Blonde
Leffe Royale	7,5%	2012	Blonde

Modéliser les contraintes suivantes à l'aide de variables binaires :

- Sa sélection de Leffe doit contenir au moins trois bières mais ne peut contenir toutes les bières.
- Sa sélection de Leffe doit contenir au moins deux bières de moins de 7%.
- Sa sélection de Leffe ne peut pas contenir plus de trois bières blondes si elle ne contient pas de bière ambrée.
- Sa sélection de Leffe ne peut contenir la Radieuse si la Nectar est sélectionnée.

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Optimisation en nombres entiers (24 novembre 2017)

- (e) Sa sélection de Leffe peut contenir une bière de plus de 10 ans seulement si une bière de moins de 6% est sélectionnée.
- (f) Sa sélection de Leffe contient soit à la fois de la Leffe blonde et de la Leffe brune, soit aucune des deux.

#### Question 4:

Dans le cadre d'un festival étudiantin, le restaurant *Gina* décide de vendre des pizzas à prix démocratiques. Le restaurant envisage de confectionner les pizzas suivantes : Margarita, Prosciutto, Funghi et Ciccio.

Pour chaque type de pizza, le tableau ci-dessous indique les ingrédients nécessaires à la confection d'une pizza, conditionnés par doses, ainsi que les quantités disponibles en stock :

<i>Ingrédients</i>	Margherita	Ciccio	Prosciutto	Funghi	Stock
Sauce tomate	15	12	12	12	5000
Mozzarella	8	6	6	6	2000
Basilic	3	0	2	0	450
Jambon	0	3	6	2	250
Champignons	0	4	0	4	400

Les pizzas Margarita, Ciccio, Prosciutto et Funghi seront vendues aux prix respectifs de 17 CHF, 22 CHF, 22 CHF et 17 CHF. Le restaurant souhaite maximiser les revenus retirés de la vente de ces pizzas.

(1) Formuler ce problème comme un problème d'optimisation sous forme canonique en déterminant :

- les variables de décision,
- la fonction objectif,
- la/les contrainte(s).

(2) Après discussion avec les organisateurs du festival, il est décidé qu'afin de satisfaire le plus grand nombre d'étudiants, au moins trois pizzas différentes doivent être proposés et qu'au moins une pizza sur deux ne doit pas contenir de champignons. Formuler ces nouvelles contraintes.

### Question 5:

Vrai ou Faux

1. Pour un problème d'optimisation en nombres entiers, le nombre de solutions admissibles augmente linéairement à mesure que le nombre de variables dans le problème augmente.
  - (a) Vrai
  - (b) Faux
2. Pour un problème d'optimisation en nombres entiers, il existe des conditions d'optimalité permettant de vérifier qu'une solution donnée est optimale ou non.
  - (a) Vrai
  - (b) Faux
3. L'algorithme de branch-and-bound trouve toujours la solution optimale.
  - (a) Vrai
  - (b) Faux
4. Pour un problème de minimisation, on obtient une borne supérieure en résolvant le problème relaxé.
  - (a) Vrai
  - (b) Faux
5. Lorsque l'on "branch" dans l'algorithme du branch-and-bound, on crée de nouveaux sous-problèmes en partitionnant l'ensemble des solutions admissibles.
  - (a) Vrai
  - (b) Faux
6. Si l'on "branch" sur la variable  $x_1^* = 0,75$ , on crée deux nouveaux sous-problèmes en ajoutant les contraintes  $x_1 \geq 0$  et  $x_1 \leq 1$ .
  - (a) Vrai
  - (b) Faux