Optimisation en nombres entiers (24 novembre 2017)

Solution de la question 1:

1. On peut modéliser ce problème par un graphe où chaque noeud représente une question et les arcs représentent le passage d'une question i à une question j. On associe à chaque arc un *coût* t_{ij}, représentant le temps de correction de la question j lorsqu'elle suit la correction de la question i. Le graphe est représenté sur la Figure 1.

2. Dans ce graphe, une solution admissible est un cycle qui visite tous les noeuds exactement une fois. En effet, à la fin de la correction d'une copie, il faut revenir à la configuration initiale pour recommencer la correction de la copie suivante. Ce problème est donc équivalent au problème du voyageur de commerce dans ce graphe. Une solution admissible est montré en (gras) bleu sur la même Figure 1. Cela correspond à corriger chacune des copies dans l'ordre : Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5. Le temps total est de 88 minutes.

3. Une solution optimale est un tel cycle avec le coût minimal (temps de correction total minimal).

4. Pour chaque paire de questions (i, j), nous définissons une variable binaire x_{ij}. Elle vaut 1 si la question j est corrigée après la question i, et 0 sinon. Le problème est alors modélisé comme un problème du voyageur de commerce représenté par les équations (25.56) et (25.57) dans le livre de référence :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1..n} \sum_{j \neq i} t_{ij} x_{ij} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, ..., n, \\
& \sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 && \forall j = 1, ..., n, \\
& x_{ij}(n-1) + y_i - y_j \leq n-2 && \forall i = 2, ..., n, j = 2, ..., n, i \neq j, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, ..., n, j = 1, ..., n, i \neq j, \\
& y_i \geq 0 && \forall i = 1, ..., n.
\end{aligned}
$$

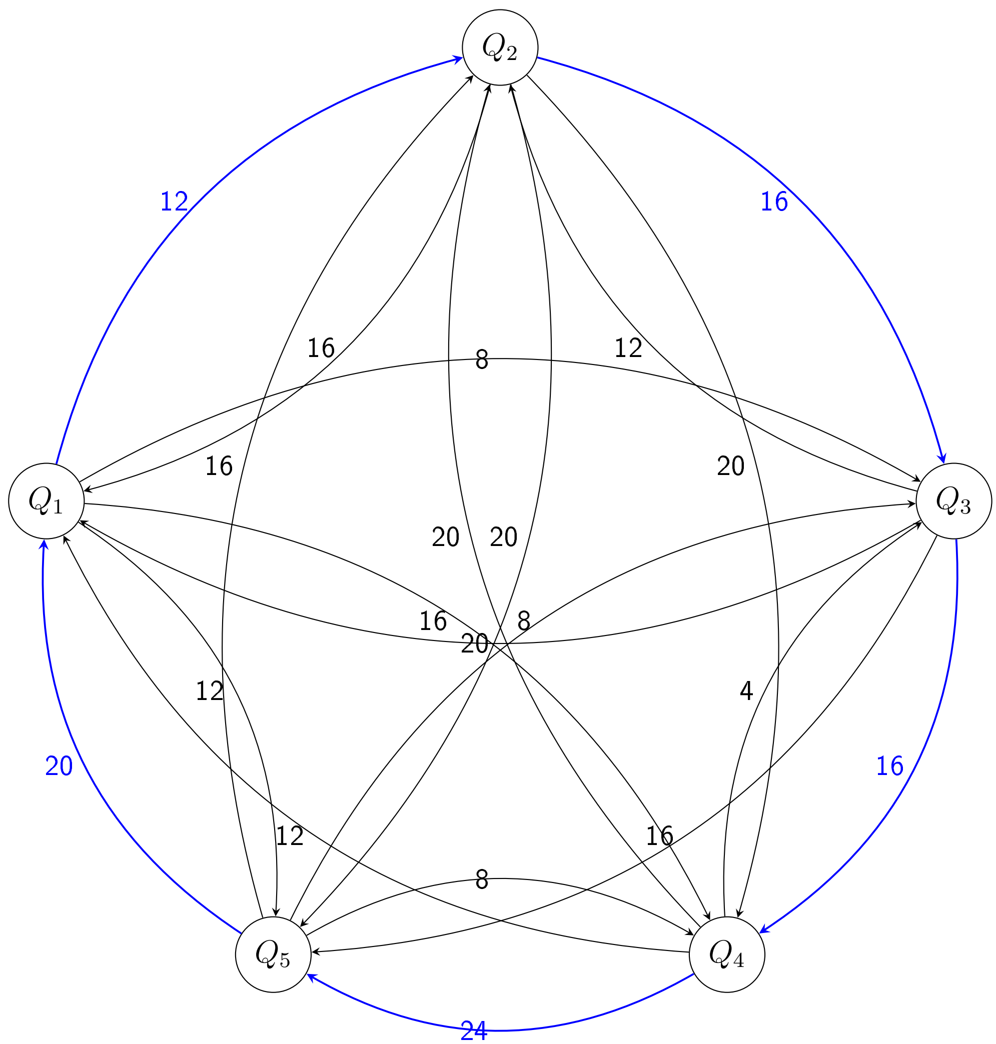

FIGURE 1 – Graphe décrivant les différentes possibilités de correction. Une solution admissible est donnée en bleu.

Solution de la question 2:

Soit x_1 le nombre de tonneaux de Sat'blonde et x_2 le nombre de tonneaux de Sat'brune. Le problème d'optimisation linéaire maximisant les bénéfices du gérant de Sat' est donné par :

$$\max 30x_1 + 50x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2.5x_1 + 7.5x_2 &\leq 200 \\ 0.125x_1 + 0.125x_2 &\leq 4.5 \\ 17.5x_1 + 10x_2 &\leq 580 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pour votre information, la solution optimale consiste à produire 14 tonneaux de Sat'blonde et 22 tonneaux de Sat'brune.

Solution de la question 3:

Nous définissons les variables binaires suivantes :

- $x_1 = 1$ si la Leffe Brune fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_2 = 1$ si la Leffe Triple fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_3 = 1$ si la Leffe Vieille Cuvée fait partie de la sélection, 0 sinon.
- x_4= 1 si la Leffe Blonde fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_5 = 1$ si la Leffe Radieuse fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_6 = 1$ si la Leffe Rituel 9°fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_7 = 1$ si la Leffe Ruby fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_8 = 1$ si la Leffe Nectar fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_9 = 1$ si la Leffe Royale fait partie de la sélection, 0 sinon.

(a) Sa sélection de Leffe doit contenir au moins trois bières mais ne peut contenir toutes les bières.

$$3 \leq \sum_i x_i \leq 8$$

(b) Sa sélection de Leffe doit contenir au moins deux bières de moins de 7%.

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 2$$

(c) Sa sélection de Leffe ne peut pas contenir plus de trois bières blondes si elle ne contient pas de bière ambrée. Cela signifie que

$$\text{si } x_3 + x_5 = 0, \text{ alors } x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \leq 3$$

On définit une nouvelle variable $y = 1$ si la sélection ne contient pas de bière ambrée :

$$x_3 + x_5 \geq 1 - y$$

Il est facile de vérifier que si la sélection ne contient pas de bière ambrée, le terme de gauche égale à 0 et y doit prendre la valeur 1. Par contre si la section contient une bière ambrée, le terme de gauche est strictement supérieur à 0 et l'équation est satisfaite peu importe la valeur de y. Finalement, il reste à modéliser que

$$\text{si } y = 1, \text{ alors } x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \leq 3$$

Cette condition est remplie grâce à la contrainte suivante :

$$x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \leq 3y + 5(1 - y)$$

Il est facile de vérifier que si $y = 1$, alors le terme de droite vaut 3 et la somme de gauche doit être inférieure à 3. Par contre si $y = 0$, le terme de droite vaut 5 et aucune des variables n'est contrainte (puisque la somme de 5 variables binaires est toujours inférieure à 5).

(d) Sa sélection de Leffe ne peut contenir la Radieuse si la Nectar est selectionnée.

$$x_5 \leq 1 - x_8$$

Il est facile de vérifier que si $x_8 = 1$, alors x_5 ne peut prendre que la valeur 0. Par contre si $x_8 = 0$, x_5 est libre de prendre la valeur 0 ou 1.

(e) Sa sélection de Leffe peut contenir une bière de plus de 10 ans seulement si une bière de moins de 6% est selectionnée. Cela signifie que

$$\text{si } x_7 + x_8 \leq 0, \text{ alors } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

On définit une nouvelle variable $y = 1$ si la sélection ne contient pas de bière de moins de 6% :

$$x_7 + x_8 \geq 1 - y$$

Il est facile de vérifier que si la section ne contient pas de bière de moins de 6%, le terme de gauche égale à 0 et y doit prendre la valeur 1. Par contre si la section contient une bière de moins de 6%, le terme de gauche est strictement supérieur à 0 et l'équation est satisfaite peu importe la valeur de y. Finalement, il reste à modéliser que

$$\text{si } y = 1, \text{ alors } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

Cette condition est remplie grâce à la contrainte suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6(1 - y)$$

Il est facile de vérifier que si $y = 1$, alors le terme de droite vaut 0 et la somme de gauche doit être nulle. Par contre si $y = 0$, le terme de droite vaut 6 et aucune des variables n'est contrainte (puisque la somme de 6 variables binaires est toujours inférieure à 6).

(f) Sa sélection de Leffe contient soit à la fois de la Leffe blonde et de la Leffe brune, soit aucune des deux.

$$x_1 = x_4$$

Solution de la question 4:

1. Nous définissons les variables de décision suivantes :
   - Soit x_1 le nombre de pizzas Margarita,
   - Soit x_2 le nombre de pizzas Ciccio,
   - Soit x_3 le nombre de pizzas Prosciutto,

— Soit x_4 le nombre de pizzas Funghi.

Le problème d'optimisation linéaire maximisant les revenus retirés de la vente des pizzas est donné par :

$$\max 17x_1 + 22x_2 + 22x_3 + 17x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 15x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 12x_4 &\leq 5000 \\ 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 &\leq 2000 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 450 \\ 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\leq 250 \\ 4x_2 + 4x_4 &\leq 400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. Au moins trois types de pizzas doivent être proposés et au moins une pizza sur deux ne doit pas contenir de champignons :

   Pour la première contrainte, nous introduisons les 4 variables binaires suivantes :
   - y_1 est égale à 1 si la pizza Margarita est proposée,
   - y_2 est égale à 1 si la pizza Ciccio est proposée,
   - y_3 est égale à 1 si la pizza Prosciutto est proposée,
   - y_4 est égale à 1 si la pizza Funghi est proposée.

   Ces conditions sont traduites par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} y_1 &\leq x_1 \\ y_2 &\leq x_2 \\ y_3 &\leq x_3 \\ y_4 &\leq x_4 \end{aligned}$$

Les deux conditions à remplir s'expriment alors à l'aide des contraintes suivantes :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 3$$
$$2(x_2 + x_4) \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Solution de la question 5:

Les réponses au Vrai ou Faux sont les suivantes :

1. Faux. Pour un problème d'optimisation en nombres entiers, le nombre de solutions admissibles augmente, généralement, **exponentiellement** à mesure que le nombre de variables dans le problème augmente. On peut aussi trouver des cas particuliers où le nombre de solutions admissibles reste constant peu importe le nombre de variable. L'exemple suivant n'admet qu'une seule solution de base admissible peu importe le nombre de variables n :

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_i x_i \\ \text{s.c.} \quad & x_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots n\} \end{aligned}$$

2. Faux. Il est possible de caractériser la solution optimale d'un problème d'optimisation en nombre entiers, simplement en écrivant le problème donné. Par contre, il n'existe pas de conditions d'optimalité permettant de vérifier qu'une solution donnée est optimale ou non.

3. Vrai. L'algorithme de branch-and-bound trouve toujours la solution optimale car il s'agit d'une méthode dite *exacte*. Dans le pire des cas, l'algorithme de branch-and-bound énumère toutes les solutions admissibles. On peut ainsi identifier la solution optimale parmis les candidates. Les méthodes *heuristiques*, quant à elles, utilisent une approche intuitive dans laquelle la structure du problème peut être interprétée et exploitée intelligemment pour obtenir une solution raisonnable.

4. Faux. Pour un problème de minimisation, on obtient une borne **inférieure** en résolvant le problème relaxé. A l'inverse, pour un problème de maximisation, on obtient une borne supérieure en résolvant le problème relaxé.

5. Vrai. Lorsque l'on “branch”, on crée de nouveaux sous-problèmes en partitionnant l'ensemble des solutions admissibles. Le terme “bound” lui désigne la recherche de bornes sur le coût optimal pour éliminer des régions admissibles sans les explorer. Ces bornes sont obtenues en résolvant le problème relaxé.

6. Faux. Si l'on “branch” sur la variable $x_1^* = 0,75$, on crée deux nouveaux sous-problèmes en ajoutant les contraintes $x_1 \leq 0$ et $x_1 \geq 1$. On exclut de ce fait $x_1^* = 0,75$.