Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2017–2018)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Modélisation (22 septembre 2017)

Question 1:

La société Coola-Coola souhaite créer une canette d'un volume de 0,33l pour une nouvelle boisson fraîche et sucrée. La société se demande qu'elles doivent-être les dimensions en cm de cette canette afin d'utiliser le moins d'aluminium possible. La forme de la canette est celle d'un cylindre et on suppose que l'épaisseur est la même sur toute la canette.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) les contraintes.
2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.

Question 2:

Un producteur d'une chaîne de télévision doit programmer une émission le dimanche après-midi sur une chaîne régionale. L'émission durera 3 heures 30 et sera composée de séquences informatives, éducatives, divertissantes, et publicitaires. Bien sûr, la plupart du profit se fera au travers de séquences publicitaires. La chaîne de télévision fait payer 500 CHF par minute de publicité. Le gouvernement, qui souhaite améliorer la qualité de la télévision, a décidé d'offrir 170 CHF par minute de contenu éducationnel. Par contre, chaque minute de contenu informatif coûte 90 CHF à la chaîne de télévision et le contenu divertissant coûte, lui, 350 CHF par minute.

Le producteur de la chaîne souhaite organiser l'émission de façon à ce qu'elle rapporte le plus d'argent possible. Cependant, les chaînes de télévision doivent respecter les règles suivantes :

— Le temps alloué au contenu divertissant ne peut pas excéder deux fois le temps alloué au contenu éducatif.

— Les séquences de publicités ne peuvent pas durer plus de 10% du temps total de l'émission.

— Le temps alloué au contenu informatif doit être au moins égal au temps alloué aux publicités.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) la/les contrainte(s).
2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.
3. Formuler ce problème comme un problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision.

Question 3:

Joanna fait de la poterie. Elle aime créer des tasses et des assiettes. Elle a besoin de 72 minutes pour créer une tasse, alors qu'il ne lui faut que 30 minutes pour créer une assiette. Il lui faut 75g d'argile pour créer une tasse et 100g pour une assiette. Comme l'argile à nu n'est pas très joli, elle aime décorer ses créations avec de la couleur. Il lui faut 4cl de couleur pour une tasse et 11cl pour une assiette. Tout cela a un prix. L'argile coûte 10 CHF par kg et la couleur coûte 17 CHF par litre. Joanna vend chaque tasse à 7 CHF et chaque assiette à 5 CHF.

Joanna a besoin d'aide. Elle aimerait pouvoir gagner un maximum d'argent par semaine sans avoir à travailler plus de 8 heures par jour et 5 jours par semaine. Malheureusement, l'argile est une ressource limitée et elle ne peut pas en commander plus de 4 kg par semaine.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) la/les contrainte(s).

2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.

3. Formuler ce problème comme un problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision.

Question 4:

En se basant sur les chiffres des années précédentes, le directeur d'une usine de production sait que lorsqu'il varie son taux de production, il encourt des coûts supplémentaires. Lorsque la production est augmentée d'un mois à l'autre, il estime que le coût par unité augmente de 2 CHF. D'autre part, la réduction de la production génère une augmentation des coûts de production de 1 CHF par unité. Un rythme de production lisse est évidemment souhaitable pour éviter ces coûts supplémentaires.

Les prévisions de ventes pour les douze prochains mois sont (en milliers) les suivantes :

Juillet : 4	Octobre : 12	Janvier : 20	Avril : 6
Août : 6	Novembre : 16	Février : 12	Mai : 4
Septembre : 8	Décembre : 20	Mars : 8	Juin : 4

Le calendrier de production du mois de juin a déjà été fixé à 3000 unités. Au 1er juillet, le niveau de l'inventaire devrait être de 1000 unités. Le stockage des unités est possible à tout moment mais jamais plus de 12000 unités ne peuvent être stockées en même temps. Les coûts d'inventaire sont négligeables.

Formuler un problème d'optimisation visant à planifier la production pour l'année à venir. Les coûts des changements des taux de production doivent être minimisés et la production doit répondre à toutes les demandes de vente.

Astuce : exprimer le changement de production du mois $t-1$ au mois t en termes de variables non négatives x_t^+ et x_t^-. Par exemple, si la production sur trois mois successifs 0, 1 et 2 est de 8000, 12000 et 10000 unités respectivement, alors les variables de décisions x_t^+ et x_t^-, $t \in \{1, 2\}$, sont définies comme dans la Figure ci-dessous.