Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2017–2018)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Introduction à l'optimisation linéaire–corrigé (29 septembre 2017)

Solution de la question 1:

Figure 1 – Domaine admissible : non vide et non borné

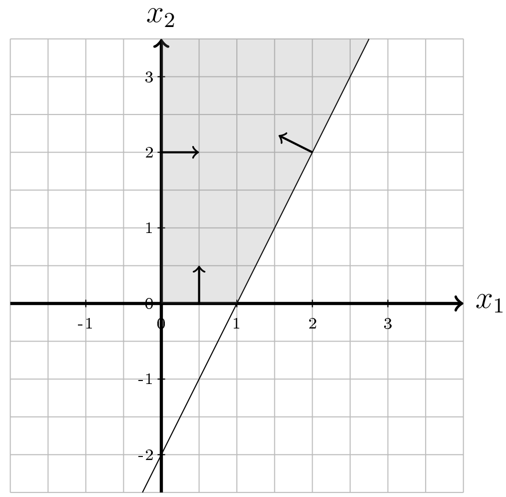


Figure 2 – Domaine admissible : vide

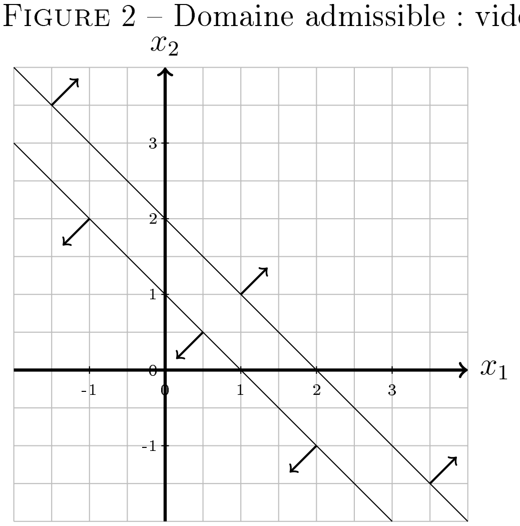


FIGURE 3 – Domaine admissible : non vide et non borné

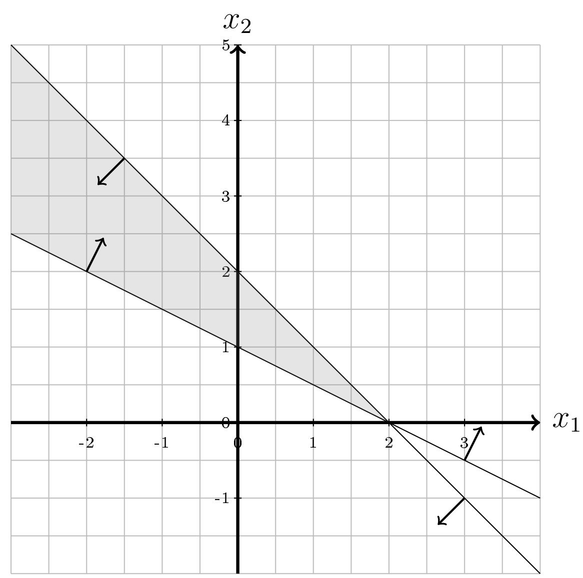


FIGURE 4 – Domaine admissible : non vide et borné

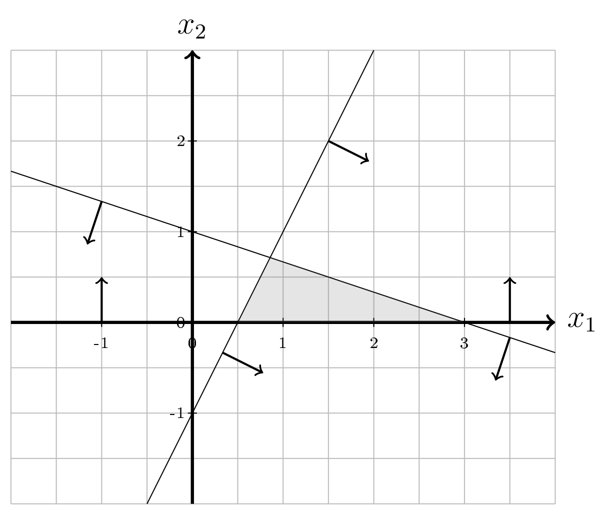
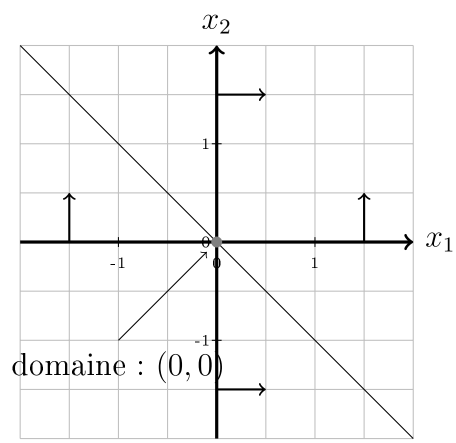


FIGURE 5 – Domaine admissible : non vide et borné.
Le domaine ne contient que le point (0,0).



Solution de la question 2:

1. Les contraintes sont les suivantes :

$$x_2 \leq 3 \tag{1}$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 24 \tag{2}$$
$$x_1 - x_2 \leq 4 \tag{3}$$
$$2x_1 + x_2 \geq 4 \tag{4}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{5}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{6}$$

2. Le problème d'optimisation en forme standard s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{lcccccccccl}
\min & -x_1 & -x_2 & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_2 & +x_3 & & & & = & 3 \\
 & 3x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & & = & 24 \\
 & x_1 & -x_2 & & & +x_5 & & = & 4 \\
 & 2x_1 & +x_2 & & & & -x_6 & = & 4 \\
 & & & & & & x_i & \geq & 0 & \forall i \in 1,\ldots,6
\end{array}$$

Nous avons donc que $m = 4$ (nombre de contraintes) et $n = 6$ (nombre de variables).
De plus, la matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et les vecteurs $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ valent

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Le tableau suivant donnent toutes les solutions de base. Chaque solution de base est obtenue en fixant $n - m = 2$ variables hors base, c'est-à-dire égale à 0, et en calculant les autres variables en utilisant la matrice $\boldsymbol{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}$.

Point	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Admissible ?
A	-8/5	36/5	-21/5	0	64/5	0	non
B	0	6	-3	0	10	2	non
C	0	4	-1	8	8	0	non
D	0	3	0	12	7	-1	non
E	1/2	3	0	21/2	13/2	0	oui
F	4	3	0	0	3	7	oui
G	7	3	0	-9	0	13	non
H	8/3	-4/3	13/3	64/3	0	0	non
I	0	0	3	24	4	-4	non
J	2	0	3	18	2	0	oui
K	40/7	12/7	9/7	0	0	64/7	oui
L	4	0	3	12	0	4	oui
M	8	0	3	0	-4	12	non
N	0	-4	7	40	0	-8	non
–	–	0	0	–	–	–	–

Note : Il est impossible d'avoir $x_2 = x_3 = 0$ et ce cas est marqué par des tirets dans le tableau.

4. Dans la Figure 6, les solutions de base sont données avec les même lettres que dans le tableau ci-dessus : de A à N.

Les solutions de base admissibles sont :

E(1/2,3), F(4,3), J(2,0), K(40/7,12/7) et L(4,0)

Les solutions de bases correspondent aux intersections des contraintes.

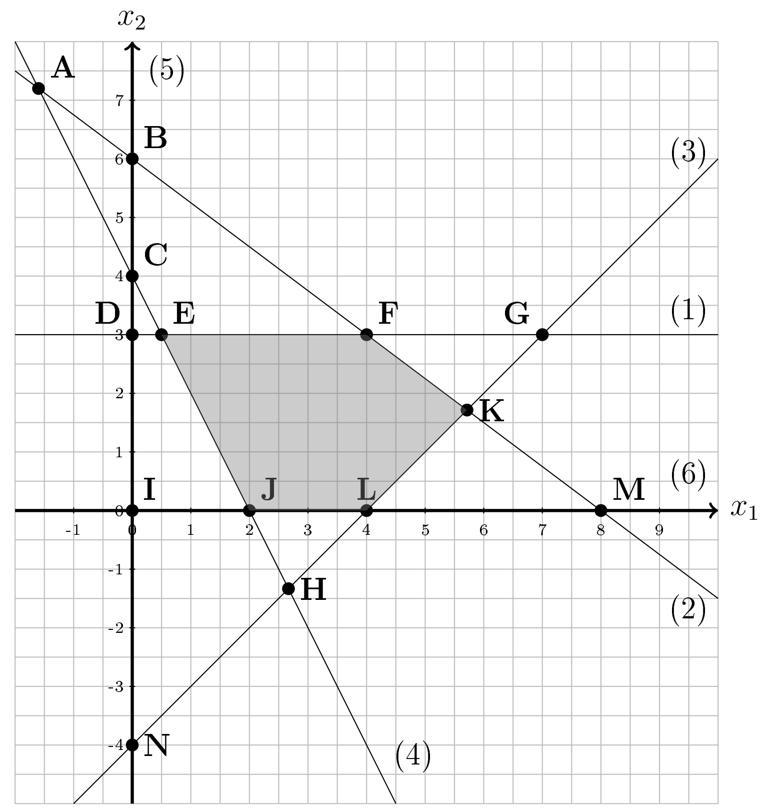


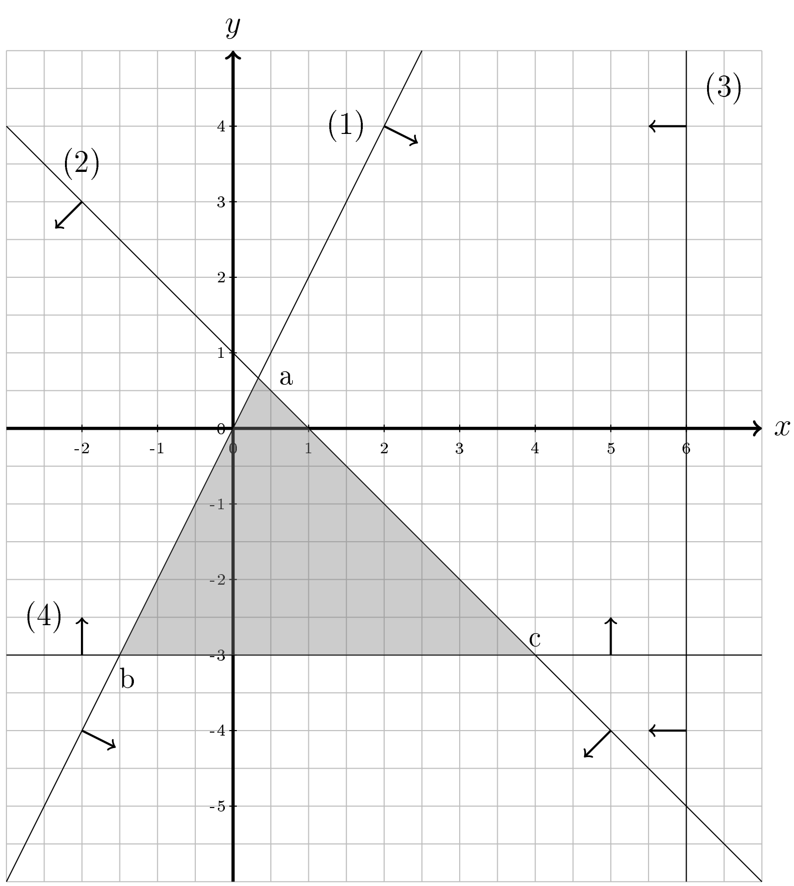
Figure 6 – Basic solutions

5. Pour le problème en forme standard, le point (3,2) correspond au point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 2, 1, 7, 3, 4)$. C'est une solution admissible car toutes les contraintes sont vérifiées. Pour que ce soit une solution de base admissible, il faudrait qu'au moins deux variables aient une valeur nulle. En effet, $n = 6$ et $m = 4$. Il doit donc y avoir 4 variables en base, et 2 hors de la base, ces deux dernières étant nulles. Ce n'est pas le cas, donc il s'agit pas d'une solution de base admissible.

Introduction à l'optimisation linéaire–corrigé (29 septembre 2017)

Solution de la question 3 – QCM:

1. (b) Incompatible signifie qu'aucune solution ne vérifie les contraintes. La réponse est donc 0.
2. (b)
3. (a)
4. (b) Si le vecteur $\boldsymbol{x}$ est un sommet de Q, cela signifie que c'est une solution de base admissible. Puisque c'est une solution admissible, elle doit automatiquement satisfaire la contrainte $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$.
5. (d) Le domaine admissible est donné ci-dessous :



Les sommets sont a=(1/3, 2/3), b=(-1.5, -3) et c=(4, -3). De plus, on voit que la contrainte (3) est redondante.