Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2017–2018)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Introduction à l'optimisation linéaire (6 octobre 2017)

Question 1:

Considérer le domaine admissible de la Figure 1 défini par les contraintes suivantes :

$$x_1 - x_2 \geq -2, \quad (1)$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 9, \quad (2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 7, \quad (3)$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -7, \quad (4)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

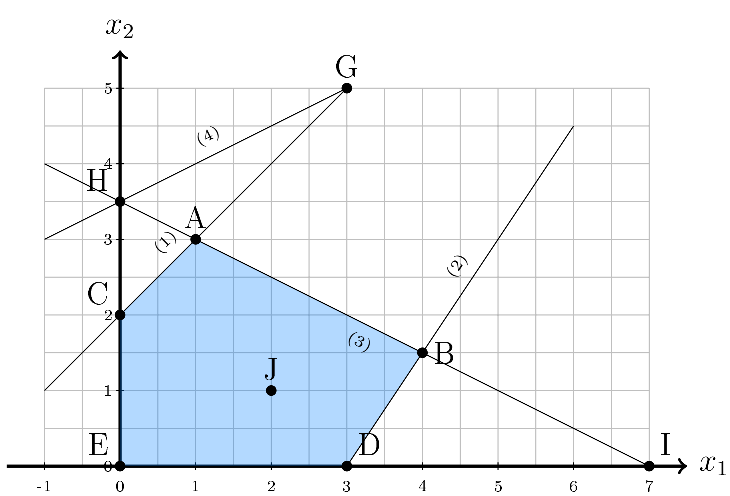

Figure 1 – Domaine admissible

1. Ecrire le domaine admissible sous forme standard.
2. Pour chaque sommet du domaine admissible, c'est-à-dire les points E, C, A, B et D, calculer la valeur des variables d'écart. Montrer ensuite que ces points correspondent bien à des solutions de base admissibles.
3. Montrer que le point G correspond à une solution de base non admissible.

4. Montrer que le point J ne correspond pas à une solution de base mais est une solution admissible.
5. Dessiner sur la Figure 1 toutes les directions de base admissibles en A. Pour chaque direction, spécifier quelle variable quitte la base et quelle variable entre dans la base.
6. En vous aidant de la représentation graphique, écrire le nombre minimal de contraintes pour représenter le domaine délimité par les points E, C, A, B, D.

Question 2:

Transformer le problème suivant en forme standard :

$$\max -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &\geq 7 && (1)\\
8x_1 - 5x_3 + 3x_4 &\leq 8 && (2)\\
-2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &\leq -6 && (3)\\
1 \leq x_1 &\leq 4, && (4)\\
x_2 &\geq -3, && (5)\\
x_3 &\in \mathbb{R}, && (6)\\
x_4 &\leq 0 && (7)
\end{aligned}$$

Question 3:

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

sous contraintes

$$3x_1 - 2x_3 \leq 5, \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4, \quad (2)$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \quad (3)$$
$$3x_2 \geq 3, \quad (4)$$
$$x_3 \leq 9, \quad (5)$$
$$x_1 \geq 0, \quad (6)$$
$$x_2 \geq 0, \quad (7)$$
$$x_3 \geq 0. \quad (8)$$

Sachant que la solution $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, \alpha)$ est optimale, donner la valeur de α et lister les contraintes actives et celles inactives.

Question 4:

Une société pharmaceutique produit trois composés chimique (A, B et C) en utilisant le même processus de production. Il faut 2 heures pour produire 1 kilogramme du composé A, 8 heures pour 1 kilogramme du composé B et 4 heures pour 1 kilogramme du composé C. De plus, le composé C doit être raffiné à la main. Cela prend 4 heures par kilogramme. Chaque semaine, la société peut produire des composés (sans le raffinement) pendant maximum 210 heures et elle ne doit pas dépasser 70 heures de raffinement.

Ces composants sont finalement utilisés afin de créer deux médicaments différents: le Destressor 3000 et l'Anxiongenus 500. Le Destressor 3000 est composé à moitié du composant A et à moitié du composant C. Il est vendu au prix de 30 CHF par kilogramme. L'Anxiogenus 500 est un mélange obtenu à partir des composants B et C avec un ratio 3:1. Il est vendu au prix de 45 CHF par kilogramme. En outre, il existe un quota sur le marché et la société ne peut pas produire plus de 40 kg de médicaments par semaine (cela comprend le Destressor 3000 et l'Anxiogenus 500).

Formuler le problème de la planification de la production hebdomadaire qui maximise le profit de la société comme un problème d'optimisation linéaire et chercher la solution optimale graphiquement.

Indice: Formuler le problème en 2 variables.