Introduction à l'optimisation linéaire — Grille de lecture

Michel Bierlaire

Ce document a pour but de guider les étudiants pour l'utilisation du livre dans le cadre de l'auto-apprentissage, afin d'éviter de devoir tout lire. Les parties du livre à apprendre pour ce thème sont :

- Section 3.2 (pp. 56–58),
- Section 3.4 (pp. 75–78),
- Section 3.5 (pp. 78–91),
- Section 6.5 (à partir de la définition 6.28 p. 166– pp.171).

Un problème d'optimisation linéaire est tel que la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision. Un problème d'optimisation linéaire peut toujours s'écrire sous la forme suivante, impliquant n variables et m contraintes:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Avant d'essayer de le résoudre, il faut analyser la structure du problème.

1. On peut faire l'hypothèse que la matrice A est de rang plein. Ceci est discuté au début de la section 3.2. Le théorème 3.6 explique pourquoi on peut toujours supposer cela. Il est illustré par l'exemple 3.7.

2. Les contraintes d'égalité linéaires peuvent être éliminées. Cette procédure, qui va être à la base des algorithmes vu plus loin, est décrite à la section 3.4.

3. La section 3.5 fait une analyse détaillée de l'ensemble des contraintes, en combinant des arguments géométriques et algébriques. En résumé :

   - L'ensemble des contraintes est un polyèdre.
   - Nous verrons plus tard qu'on peut trouver la solution d'un problème d'optimisation linéaire sur un sommet du polyèdre (théorème 16.2). Nous analysons donc en détail comment définir et identifier ces sommets (section 3.5.1).
   - La notion de "solution de base admissible" (section 3.5.2) est la représentation algébrique du concept géométrique de "sommet" (voir théorème 3.40), qui nous permettra de développer un algorithme.
   - La notion de "direction de base" (section 3.5.3) permettra à l'algorithme de se déplacer le long des côtés du polyèdre.

Avant de chercher à résoudre un problème d'optimisation, il faut caractériser une solution optimale. Ceci est l'objet de la section 6.5. Le début de la section fait référence au début du chapitre 6 et peut être ignoré. Ce qui est important, c'est la définition 6.28 des coûts réduits. Ils représentent la dérivée directionnelle de la fonction objectif dans les directions de base (théorème 6.29).

Ensuite, les théorèmes 6.30 et 6.31 caractérisent la solution optimale du problème linéaire. Attention, les conditions nécessaires et suffisantes sont différentes. Il est important de bien comprendre le concept de dégénérescence (définition 3.41) pour comprendre la différence entre les deux conditions d'optimalité.

La dernière partie de la section (incluant le corollaire 6.32 et le théorème 6.33), nécessite de connaître la dualité, qui sera vue ultérieurement. Elle peut être ignorée à ce stade.

Exercices suggérés : 3.1, 3.3 (sauf questions 1 and 4a), 3.4, 3.5.