Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Algorithme du simplexe –corrigé (7 octobre 2016)

Solution de la question 1:

1. Si les indices de base sont 1,2 et 3, la matrice de base est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse s'écrit :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur b étant

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

les variables de base valent

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

La variable hors-base x_4 vaut par définition 0. Cette solution de base est admissible.

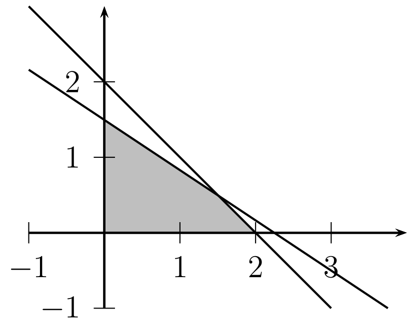
2. Calculons le coût réduit pour la variable x_4 :

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 1 > 0.$$

Avancer dans la direction de base correspondant à x_4 ne réduit pas le coût. Comme x_4 est la seule variable hors de la base, la solution de base admissible d'indices 1, 2 et 3 est donc la solution optimale du problème.

Solution de la question 2:

1. Domaine admissible :



2. Le seul point admissible lorsque les deux contraintes sont actives est le sommet $(3/2, 1/2)$.
3. Tous les points sur la ligne entre $(0, 9/6)$ et $(3/2, 1/2)$ sont optimaux.

Solution de la question 3:

Introduire les variables d'écart x_4, x_5, and x_6. Le problème s'écrit alors

$$\min x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & = 9 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = 4 \\ x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & ,x_6 & \geq 0 \end{array}$$

Comme $b \geq 0$, nous pouvons choisir les variables x_4, x_5 x_6 pour être dans la base initiale. Ainsi,

$$B = (A_4 \quad A_5 \quad A_6) = I.$$

Nous obtenons ainsi le tableau initial :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	1	2	1	0	0	9
1	1	-1	0	1	0	2
-1	1	1	0	0	1	4
1	1	-4	0	0	0	0

La variable x_3 entre en base, et la variable x_6 en sort.

3	-1	0	1	0	-2	1
0	2	0	0	1	1	6
-1	1	1	0	0	1	4
-3	5	0	0	0	4	16

La variable x_1 entre en base, et la variable x_4 en sort.

1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
0	2	0	0	1	1	6
0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3
0	4	0	1	0	2	17

Tous les coûts réduits sont positifs. La solution optimale est $x^* = (1/3, 0, 13/3, 0, 6, 0)$ et la valeur de la fonction objectif est -17.

Solution de la question 4:

Introduire les variables d'écart x_3, x_4 et x_5 pour obtenir le problème en forme standard :

$$\min x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & & & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 1 \\ & x_2 & & & +x_5 & = 3 \\ x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Il n'est pas possible de trouver trivialement un tableau initial. Dès lors, il faut effectuer la Phase I de l'algorithme du simplexe. Pour cela, les variables artificielles x_6, x_7 et x_8 sont introduites (une par contrainte). La fonction objectif de la phase I consiste à tenter d'éliminer ces variables auxiliaires :

$$\min x_6 + x_7 + x_8.$$

Le tableau initial de la Phase I est le suivant.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	1	-1	0	0	1	0	0	2
-1	1	0	-1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	3
0	-3	1	1	-1	0	0	0	-6

La variable x_2 entre en base et la variable x_7 en sort.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
2	0	-1	1	0	1	-1	0	1
-1	1	0	-1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	-1	1	2
-3	0	1	-2	-1	0	3	0	-3

La variable x_1 entre en base, et la variable x_6 en sort.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0.5
0	1	-0.5	-0.5	0	0.5	0.5	0	1.5
0	0	0.5	0.5	1	-0.5	-0.5	1	1.5
0	0	-0.5	-0.5	-1	1.5	1.5	0	-1.5

La variable x_3 entre en base, et la variable x_8 en sort.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	0	0	1	1	0	-1	1	2
0	1	0	0	1	0	0	1	3
0	0	1	1	2	-1	-1	2	3
0	0	0	0	0	1	1	1	0

Le tableau est optimal. C'est la fin de la phase I. Nous avons une solution admissible : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 3, 3, 0, 0)$. Comme les trois variables auxiliaires sont hors de la base, il suffit de supprimer les colonnes correspondantes, et de calculer la dernière ligne du tableau pour obtenir le tableau initial de la phase II.

Phase II

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	1	1	2
0	1	0	0	1	3
0	0	1	1	2	3
0	0	0	-1	1	4

La variable x_4 entre en base, et la variable x_1 en sort.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	1	1	2
0	1	0	0	1	3
-1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	2	6

La solution optimale est $x^* = (0, 3, 1, 2, 0)$ est la valeur de la fonction objectif est -6.