Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Algorithme du simplexe (21 octobre 2016)

Question 1:

Considérer le problème d'optimisation suivant.

$$\min -x_1 - x_2$$

sous contrainte

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 \geq 1 \tag{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3}$$

1. Représenter graphiquement le domaine admissible et résoudre par la méthode graphique.
2. Résoudre par l'algorithme du tableau du simplexe, décrire sur le graphique l'avancement de l'algorithme à chaque itération.

Question 2:

Résoudre le problème d'optimisation suivant en utilisant la méthode du simplexe à deux phases.

$$\min -3x_1 + 4x_2$$

sous contraintes

$$x_1 + x_2 \leq 4 \tag{4}$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 18 \tag{5}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

Question 3:

Soit un problème de minimisation linéaire sous forme standard, et une solution de base $x = (2, 1, -1, 0, 0)$ correspondant à la matrice de base $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Alors,

1. x est une solution optimale.
2. x est une solution dégénérée.

3. x est une solution de base admissible.
4. x n'appartient pas au polyèdre des contraintes.

Question 4:

Soit un problème de minimisation linéaire avec cinq variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Dans l'itération courante de l'algorithme du simplexe, on obtient le vecteur de coûts réduits $\bar{c} = (-1, 0, 0, 1, 0)^T$ et la partie supérieure de la dernière colonne du tableau du simplexe est donnée par $B^{-1}b = (2, 4, 3)^T$. Dans ce cas,

1. la solution optimale a été trouvée,
2. la solution courante peut être exprimée par deux bases différentes,
3. la solution courante n'est pas admissible,
4. $x = (0, 2, 4, 0, 3)^T$ est un sommet de la région admissible.

Question 5:

Soit un problème de minimisation linéaire avec cinq variables $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Dans l'itération courante de l'algorithme du simplexe, on obtient le vecteur de coûts réduits $\bar{c} = (0, 0, 0, 1, 0)^T$ et la partie supérieure de la dernière colonne du tableau du simplexe est donnée par $B^{-1}b = (1, 1, 0)^T$. Dans ce cas, la solution optimale est

1. $x = (0, 1, 0, 1, 0)^T$,
2. $x = (1, 1, 0, 0, 0)^T$,
3. $x = (1, 0, 0, 1, 0)^T$,
4. $x = (0, 0, 0, 1, 1)^T$.

Question 6:

Le tableau suivant correspond à une itération de la méthode du simplexe (dans un problème de minimisation) :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	-2	1	e	0	2	f
1	g	0	-2	0	1	1
0	0	0	h	1	4	3
0	a	0	b	c	3	d

Quelle(s) condition(s) les paramètres $a, b, \ldots, h$ doivent-ils vérifier pour que les affirmations suivantes soient correctes ?

1. La base courante est optimale.
2. La base courante est l'unique base optimale.
3. La base courante est optimale, mais il existe aussi d'autres bases optimales.
4. Le problème est non borné.
5. Supposons que $b < 0$ et x_4 entre en base. A la fin de l'itération, la fonction objectif n'a pas changé.