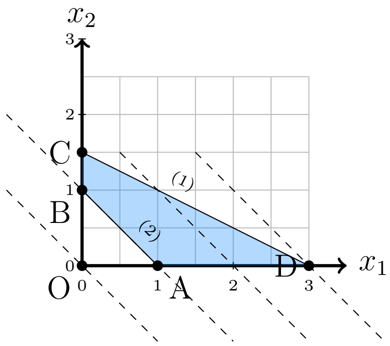
Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Algorithme du simplexe (21 octobre 2016)

Question 1:

1. Le domaine admissible est le suivant :



la solution optimale est $(x_1, x_2) = (3, 0)$.

2. Introduisons deux variables d'écart pour écrire le problème en forme standard, tel que $b \geq 0$.

$$\min -x_1 - x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + e_1 &= 3 \\ x_1 + x_2 - e_2 &= 1 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si on choisit e_1 et e_2 comme variables de base pour le tableau initial, on a la solution initiale suivante : $e_1 = 3, e_2 = -1, x_1 = 0, x_2 = 0$. Cette solution n'est pas admissible car une variable en base est négative. Donc, on utilise la méthode à 2 phases.

Nous introduisons deux variables auxiliaires a_1 et a_2 et obtenons le problème auxiliaire suivant :

$$\min a_1 + a_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + e_1 + a_1 &= 3 \\ x_1 + x_2 - e_2 + a_2 &= 1 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Le tableau initial est le suivant.

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	2	1	0	1	0	3
1	1	0	-1	0	1	1
-2	-3	-1	1	0	0	-4

On fait entrer x_1 dans la base, et a_2 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
0	1	1	1	1	-1	2
1	1	0	-1	0	1	1
0	-1	-1	-1	0	2	-2

On fait entrer x_2 dans la base, et x_1 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
-1	0	1	2	1	-2	1
1	1	0	-1	0	1	1
1	0	-1	-2	0	3	-1

On fait entrer e_1 dans la base, et a_1 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
-1	0	1	2	1	-2	1
1	1	0	-1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0

Le tableau est optimal. La solution de la première phase est donc $x_1 = 0, x_2 = 1, e_1 = 1, e_2 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$. Ainsi, la solution initiale de la deuxième phase est $x_1 = 0, x_2 = 1, e_1 = 1, e_2 = 0$.

On construit maintenant le tableau de la deuxième phase, en calculant les coûts réduits du problème original. Les variables en base sont e_1 et x_2. e_1 correspond à la première ligne du tableau et x_2 à la deuxième. Les coûts réduits pour ces deux variables sont donc nuls. Pour les variables hors-base, nous appliquons la formule, avec $c_B = (0 - 1)^T$, c'est-à-dire les coefficients de e_1 et x_2 dans la fonction objectif. Le coût réduit associé à x_1 est

$$c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = -1 - ((0 * -1) + (-1 * 1)) = 0.$$

Le coût réduit associé à e_2 est

$$c_{e_2} - c_B^T B^{-1} A_{e_2} = 0 - ((0 * 2) + (-1 * -1)) = -1.$$

Noter que $c_{e_2} = 0$ car la variable e_2 n'intervient pas dans la fonction objectif.
Pour la dernière colonne, il s'agit de la valeur de la fonction objectif, changée de signe. Comme $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, la fonction objectif est -1, et la valeur dans la cellule est donc 1.

x_1	x_2	e_1	e_2	
-1	0	1	2	1
1	1	0	-1	1
0	0	0	-1	1

La solution initiale correspond au noeud B dans la représentation graphique $B = (x_1, x_2, e_1, e_2) = (0, 1, 1, 0)$. On fait entrer e_2 dans la base, et e_1 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	
-1/2	0	1/2	1	1/2
1/2	1	1/2	0	3/2
-1/2	0	1/2	0	3/2

La solution correspond au noeud C dans la représentation graphique $C = (x_1, x_2, e_1, e_2) = (0, 3/2, 0, 1/2)$.On fait entrer x_1 dans la base, et x_2 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	
0	1	1	1	2
1	2	1	0	3
0	1	1	0	3

La solution est optimale (tous les coûts réduits sont positifs). La solution du problème est le noeud $D = (x_1, x_2, e_1, e_2) = (3, 0, 0, 2)$. La valeur de la fonction objectif est -3.

Question 2:

En introduisant les variables d'écart e_1 et e_2, on obtient les contraintes suivantes (sous forme standard) :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + e_1 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - e_2 &= 18 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

On ajoute ensuite les variables auxiliaires a_1 et a_2 pour résoudre le problème auxiliaire suivant :

$$\min a_1 + a_2$$

sous contraintes

$$x_1 + x_2 + e_1 + a_1 = 4$$
$$2x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 18$$
$$x_1, x_2, e_1, e_2, a_1, a_2 \geq 0$$

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	1	1	0	1	0	4
2	3	0	-1	0	1	18
-3	-4	-1	1	0	0	-22

x_1 entre dans la base et a_1 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	1	1	0	1	0	4
0	1	-2	-1	-2	1	10
0	-1	2	1	3	0	-10

x_2 entre dans la base et x_1 en sort.

x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	1	1	0	1	0	4
-1	0	-3	-1	-3	1	6
1	0	3	1	4	0	-6

Le critère d'optimalité de la méthode du simplexe est vérifié pour toutes les variables. La solution optimale est $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 6$, et la valeur de la fonction objectif est 6. Comme la solution optimale de la phase I n'est pas nulle, le problème de départ n'admet pas de solution admissible.

Question 3:

Comme le problème est sous forme standard, la valeur de toutes les variables doit être non négative. Dans la solution présentée, une des variables a une valeur négative, ce qui implique que la solution se trouve en dehors du domaine admissible défini par les contraintes. La réponse correcte est (4).

Question 4:

Le problème d'optimisation a 3 variables en base et 3 contraintes. Comme il s'agit d'un problème de minimisation et que le coût réduit d'une des variables est négatif, le tableau courant n'est pas optimal. De plus, la valeur de toutes les variables en base est strictement positive $(2, 3, 4)$. La réponse correcte est (4).

Question 5:

En raison de la valeur de son coût réduit, x_4 est une variable hors base. Elle doit donc être nulle. La seule solution vérifiant cette propriété est la réponse (2).

Question 6:

Dans tous les cas, pour que le tableau soit valide, il faut imposer $c = 0$, et les variables en base sont x_1, x_3 et x_5. La partie supérieure de la dernière colonne doit être non-négative, et donc $f \geq 0$.

1. Si la base courante est optimale, les coûts réduits des variables hors base sont non-négatifs. Ainsi, $a \geq 0, b \geq 0$. Les autres paramètres peuvent prendre n'importe quelle valeur.
2. Le problème a une base optimale unique si, lors de l'itération finale de l'algorithme du simplexe, tous les coûts réduits associés aux variables hors base sont strictement positifs. Ainsi, $a > 0, b > 0$.
3. En raison des conditions d'optimalité, $a \geq 0, b \geq 0$. Comme il existe des solutions optimales alternatives, nous avons trois possibilités :
   — $a = 0$ et $b > 0$. Dans ce cas, nous obtenons un autre sommet optimal en faisant entrer x_2 en base. La direction de base correspondante a comme composantes en base $d_3 = 2$, $d_1 = -g$ et $d_5 = 0$. Afin que cette direction soit bornée et que l'autre sommet puisse être atteint, il fait imposer $g > 0$;

— $a > 0$ et $b = 0$. Dans ce cas, nous obtenons un autre sommet optimal en intégrant x_4 dans la base. La direction de base correspondante a comme composante en base $d_3 = -e$, $d_1 = 2$ et $d_5 = -h$. Afin que cette direction soit bornée et que l'autre sommet puisse être atteint, au moins un des paramètres h ou e doit être positif $(e > 0, h > 0$ ou $e > 0, h \in \mathbb{R}$ ou $e \in \mathbb{R}, h > 0)$;

— Si $a = 0$ et $b = 0$ en même temps, il faut assurer que l'une des directions de base soit bornée, comme discuté dans les deux cas ci-dessus.

4. On détecte un problème non borné lorsque toutes les composantes d'une direction de base associée à un coût réduit négatif sont positifs. Cela peut se produire dans l'une des deux configurations suivantes :

   (a) $a < 0$, et x_2 peut entrer en base. Dans ce cas, la direction de base est non bornée si $g \leq 0$.

   (b) $b < 0$, et x_4 peut entrer en base. Dans ce cas, la direction est non bornée si $e \leq 0$ et $h \leq 0$.

5. Pour que la fonction objectif ne change pas, le pas effectué doit être égal à 0. Pour cela, il faut que $f = 0$ et $e > 0$. Il s'agit d'une solution de base admissible dégénérée.