Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Réseaux (2) – corrigé (18 Novembre 2016)

Solution de la question 1:

1. La résolution graphique est représentée à la Figure 1. La solution optimale du primal est

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et la valeur optimale de la fonction objectif est -1.

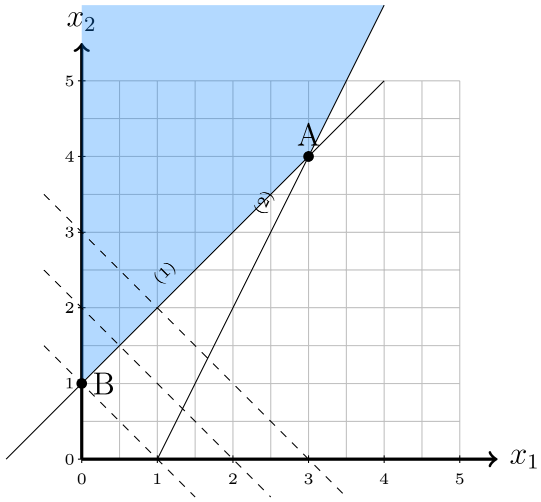


Figure 1 – Résolution graphique du primal

2. Le problème dual est

$$\min y_1 + 2y_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &\geq -1, \\ y_1 - y_2 &\geq -1, \\ y_1 &\leq 0, \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3. La résolution graphique du dual est représentée à la Figure 2. La solution optimale du problème dual est

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et la valeur optimale de la fonction objectif est -1.

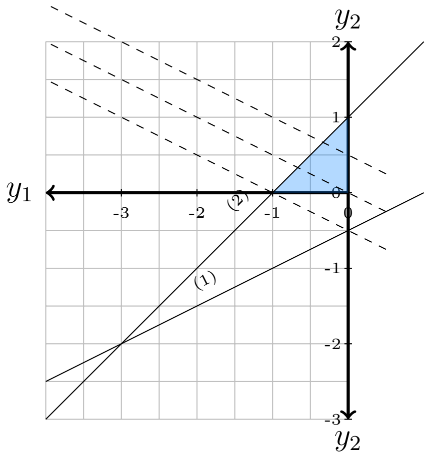


FIGURE 2 – Résolution graphique du dual

4. Le théorème de dualité forte est vérifié car les deux valeurs optimales coïncident.
5. Le problème primal en forme standard s'écrit

$$\min x_1 + x_2$$

sous contrainte

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - e_1 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 &= 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

A l'optimum, les variables d'écart valent $e_1 = 0$ et $e_2 = 3$. Les variables x_2 et e_2 sont donc en base à la solution. Dès lors,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le dual de cette formulation est

$$\max \lambda_1 + 2\lambda_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + 2\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &\leq 1 \\ -\lambda_1 &\leq 0 \\ \lambda_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Notons qu'il s'agit du même problème dual que présenté plus haut, avec $\lambda_1 = -y_1$ et $\lambda_2 = -y_2$.
Par le corollaire 6.32, les variables duales sont calculées comme suit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix} = B^{-T} c_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1^* \\ -\lambda_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de la question 2:

1. Conseil : utiliser les tables de conversion de la p. 105. Comme le problème primal a 3 contraintes et 2 variables, le problème dual a 3 variables et 2 contraintes. Le dual est

$$\max 7y_2 + 2y_3$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &= -1 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 &\leq -1 \end{aligned}$$

2. Les cas possibles sont obtenus en utilisant les corollaires 4.10 et 4.11.

Dual/Primal	Optimal	Non borné	Non admissible
Optimal	Possible	Impossible	Impossible
Non borné	Impossible	Impossible	Possible
Non admissible	Impossible	Possible	Possible

Le cas "non admissible / non admissible" ne peut pas être déduit des théorèmes. Mais il est possible de trouver des exemples. Par exemple, le primal est

$$\min x$$

sous contraintes

$$0 \cdot x \leq -1.$$

Le dual s'écrit

$$\max \mu$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mu + 1 &= 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution de la question 3:

Les coûts sont exprimés en \$100'000, et donc 12 millions de dollars est représenté par 120.

Les noeuds :

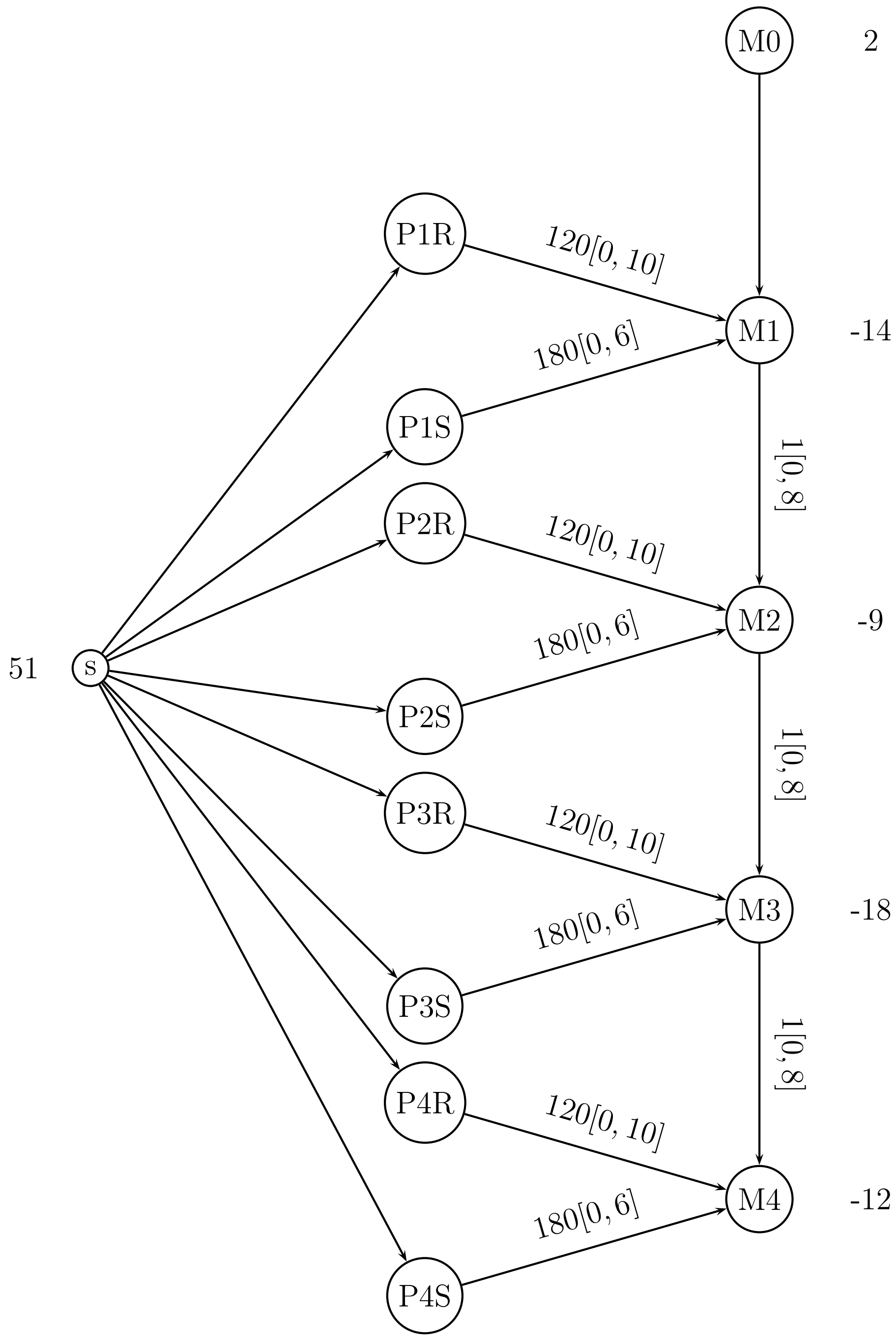
- Noeud source s générant 51 turbines (il en faut 53, et il y en a déjà 2 en stock).
- Noeuds PiR, i=1,...,4, pour la production régulière (ni source, ni puits).
- Noeuds PiS, i=1,...,4, pour la production en heures supplémentaires (ni source, ni puits).
- Noeuds Mi, i=1,...,4, pour les mois de production. M0 est une source qui génère 2 turbines (celles en stock), et les autres sont des puits qui consomment des turbines, en fonction du nombre à livrer.

Les arcs :

- Entre s et les noeuds de production : aucun coût ni bornes.
- Entre un noeud de production et les noeuds "mois" : le coût de production, ainsi que les bornes de production.

— Entre M0 et M1 : pas de coût ni de bornes. En fait cet arc va simplement véhiculer les deux turbines produites en M0. On aurait pu ne pas le mettre, et mettre la demande de M1 à -12.

— Entre Mi et Mi+1 (i=1,2,3), le coût est de 1, et la borne supérieure de 8.



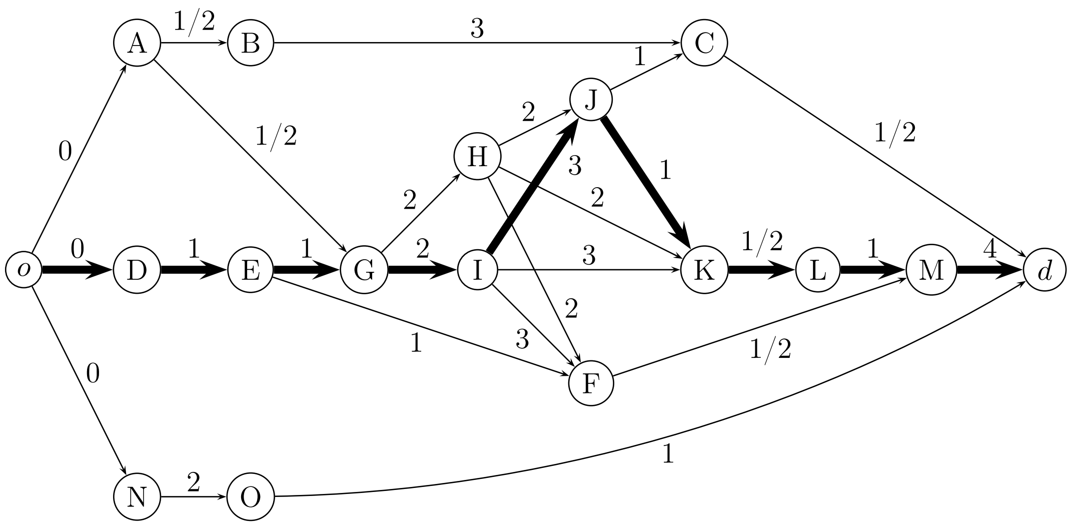
On peut vérifier que la solution optimale consiste à produire :

— Mois 1 : 10 en heures régulières, 2 en heures supplémentaires
— Mois 2 : 10 en heures régulières, 1 en heures supplémentaires
— Mois 3 : 10 en heures régulières, 6 en heures supplémentaires
— Mois 4 : 10 en heures régulières, 2 en heures supplémentaires

Deux turbines seront alors stockées entre le mois 2 et le mois 3.

Solution de la question 4:

1. Après avoir ajouté les tâches fictives o et d représentant respectivement le début et la fin des travaux, on obtient le graphe suivant (voir Section 23.4 du livre) :



2. Le plus long chemin de o à d est représenté en gras dans le réseau ci-dessus. Chaque noeud le long de ce chemin correspond à une tâche critique. Les étiquettes optimales de l'algorithme du plus long chemin, représentent le début au plus tôt de chacune des tâches (colonne δ_i dans le tableau ci-dessous).
3. Inverser ensuite tous les arcs, et calculer le plus long chemin de d à o. Evidemment, ce chemin est le même, de longueur 13.5. Pour chaque noeud, retirer la valeur de l'étiquette optimale de 13.5 pour obtenir le début au plus tard de la tâche associée (colonne φ_i dans le tableau ci-dessous). Par exemple, l'étiquette du noeud N est 3. Le début au plus tard de la tâche N est donc $13.5 - 3 = 10.5$.

Rang	Tâche	Durée	Préd.	Succ.	Début au plus tôt δ_i	Début au plus tard φ_i
1	α	0	-	A, D, N	0	0
2	A	1/2	α	B, G	0	1 1/2
3	D	1	α	E	0	0
4	N	2	α	O	0	10 1/2
5	B	3	A	C	1/2	10
6	E	1	D	G, F	1	1
7	O	1	N	ω	2	12 1/2
8	G	2	A, E	H, I	2	2
9	H	2	G	F, J, K	4	5
10	I	3	G	F, J, K	4	4
11	J	1	H, I	C, K	7	7
12	F	1/2	E, H, I	M	7	9
13	C	1/2	B, J	ω	8	13
14	K	1/2	H, I, J	L	8	8
15	L	1	K	M	8 1/2	8 1/2
16	M	4	L, F	ω	9 1/2	9 1/2
17	ω	0	C,M,O	-	13 1/2	13 1/2

La durée minimale des travaux est de 13 1/2 jours. Les tâches critiques sont D, E, G, I, J, K, L et M (elles constituent l'unique chemin critique).