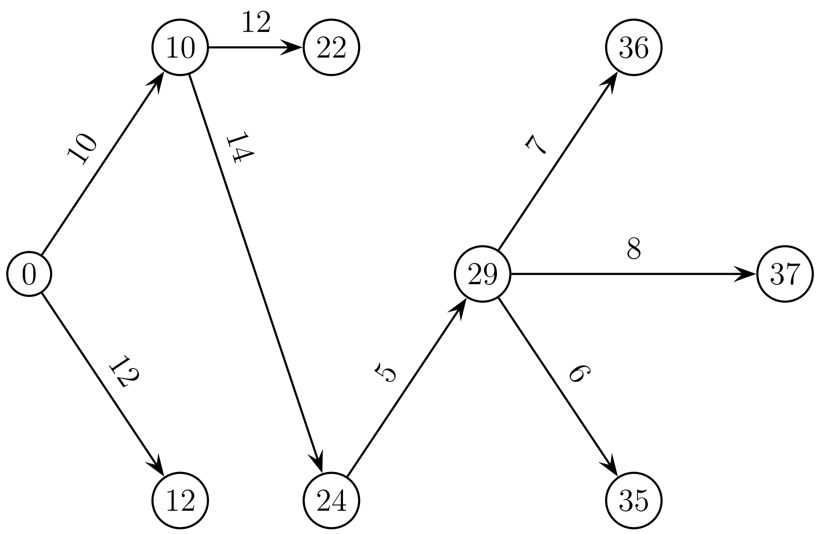
Plus court chemin – corrigé (4 Novembre 2016)

Question 1:

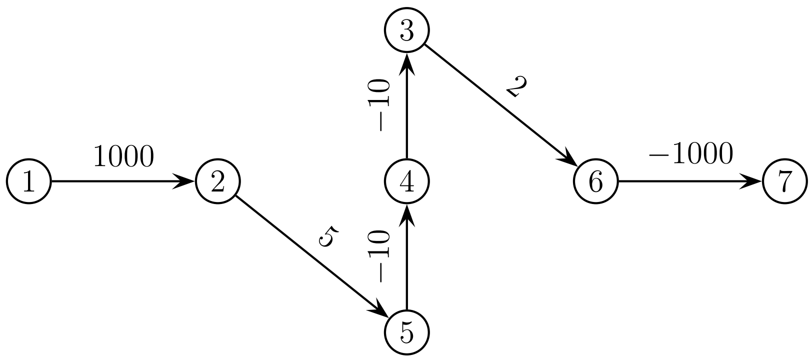
L'arbre des plus courts chemins est représenté dans la figure ci-dessous. Chaque noeud contient l'étiquette optimale.



La description des itérations de l'algorithme de Dijkstra est reprise ci-dessous :

Iter.	S	i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
0	$\{1\}$	1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{2,3\}$	2	0	10	12	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	$\{3,4,6\}$	3	0	10	12	22	∞	24	∞	∞	∞
3	$\{4,6\}$	4	0	10	12	22	∞	24	∞	∞	∞
4	$\{5,6,7\}$	6	0	10	12	22	32	24	38	∞	∞
5	$\{5,7,8\}$	5	0	10	12	22	29	24	38	39	∞
6	$\{7,8,9\}$	8	0	10	12	22	29	24	36	35	37
7	$\{7,9\}$	7	0	10	12	22	29	24	36	35	37
8	$\{9\}$	9	0	10	12	22	29	24	36	35	37
9	$\{\}$		0	10	12	22	29	24	36	35	37

Question 2:



La description des itérations de l'algorithme du plus court chemin est reprise ci-dessous :

Iter.	S	i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
0	{1 }	1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	{2 }	2	0	1000	∞	∞	∞	∞	∞
2	{3 4 5 }	3	0	1000	998	1000	1005	∞	∞
3	{4 5 6 }	4	0	1000	998	1000	1005	1000	∞
4	{5 6 3 }	3	0	1000	990	1000	1005	1000	∞
5	{5 6 }	6	0	1000	990	1000	1005	992	∞
6	{5 7 }	7	0	1000	990	1000	1005	992	-8
7	{5 }	5	0	1000	990	1000	1005	992	-8
8	{4 }	4	0	1000	990	995	1005	992	-8
9	{3 }	3	0	1000	985	995	1005	992	-8
10	{6 }	6	0	1000	985	995	1005	987	-8
11	{7 }	7	0	1000	985	995	1005	987	-13

Noter que nous avons appliqué la règle de Dijkstra choisissant à chaque itération de traiter le noeud associé à la plus petite étiquette. Cependant, à cause de la présence de coûts négatifs sur certains arcs, certains noeuds ont du être traités plusieurs fois (les noeuds 3, 4, 6 et 7).

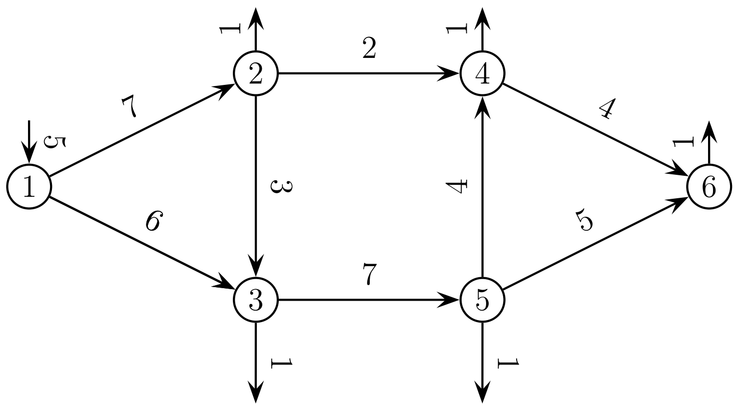
Plus court chemin – corrigé (4 Novembre 2016)

Question 3:

La forme du problème d'optimisation suggère un problème de transbordement. Chaque contrainte correspond à un noeud. Il y en a 6. Chaque variable correspond à un arc du réseau. Par exemple, la variable x_{12} correspond à l'arc reliant le noeud 1 au noeud 2. Il y a donc 8 arcs.

Chaque contrainte associe la divergence du noeud à l'offre/la demande du noeud. Le noeud 1 est une source qui émet 5 unités de flot. Chaque autre noeud est un puits qui attire 1 unité de flot. Il s'agit donc d'un problème de plus court chemin du noeud 1 vers tous les autres noeuds du réseau.

Il est bien sûr possible d'utiliser l'algorithme du simplexe,comme il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire. Cependant, comme il s'agit d'un problème de plus court chemin où tous les coûts son positifs, l'algorithme de Dijkstra peut aussi être utilisé. Et il sera plus efficace.



Question 3:

1. En appliquant le théorème 4.14, on obtient

$$\min \lambda_1$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 8\lambda_1 &= 0 \\ 3\lambda_1 &= 2 \\ \lambda_1 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On transforme le problème en minimisation :

$$\min -2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 8x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Le Lagrangien est

$$-2x_2 + \lambda_1(8x_1 + 3x_2 - 1) = 8\lambda_1 x_1 + (3\lambda_1 - 2)x_2 - \lambda_1.$$

Pour qu'il soit borné, il faut

$$\begin{aligned} 8\lambda_1 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction duale est

$$q(\lambda_1) = -\lambda_1$$

et le problème dual

$$\max -\lambda_1$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 8\lambda_1 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

qui est bien le même problème que celui obtenu avec le théorème.

2. En appliquant le théorème 4.14, on obtient

$$\max 3\mu_1 + 6\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -3\mu_1 + \mu_2 &\leq 1 \\ \mu_1, \mu_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Le Lagrangien s'écrit

$$x_1 + \mu_1(-3x_1 - 3) + \mu_2(x_1 - 6) - \mu_3 x_1 = (1 - 3\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)x_1 - 3\mu_1 - 6\mu_2.$$

Pour qu'il soit borné, il faut

$$1 - 3\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0,$$

et la fonction duale devient

$$q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = -3\mu_1 - 6\mu_2.$$

Le problème dual s'écrit donc

$$\max -3\mu_1 - 6\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 1 - 3\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 &= 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

On peut éliminer μ_3 pour obtenir

$$\max -3\mu_1 - 6\mu_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -3\mu_1 + \mu_2 &\geq -1 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Il suffit de changer μ_1 en $-\mu_1$ et μ_2 en $-\mu_2$ pour voir qu'il s'agit du même problème que celui obtenu à partir du théorème.