Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Optimisation non linéaire – corrigé (9 décembre 2016)

Solution de la question 1:

1.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 4x_1 \\ 3x_2^2 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^2(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

$(2, 2)$ n'est pas un point stationnaire, $(-1, 1)$ est un minimum local et $(0, -1)$ un maximum local.

2. $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x^1 = x^0 - (\nabla^2 f(2,2))^{-1} \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 16/11 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = x^1 - (\nabla^2 f(x^1))^{-1} \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 1.151 \\ 1.025 \end{pmatrix}$$

Solution de la question 2:

1.

$$\begin{aligned}
f(a) &= f((1,1)) = 0 \\
f(b) &= f((-1,2)) = 100(2-1)^2 + (1-(-1))^2 \\
&= 100 + 4 = 104 \\
\frac{\delta f}{\delta x_1} &= 200(x_2 - x_1^2) \cdot (-2x_1) - 2(1 - x_1) \\
&= -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \\
\frac{\delta f}{\delta x_2} &= 200(x_2 - x_1^2) \\
\nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} \end{pmatrix} \\
\nabla f(a) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\nabla f(b) &= \begin{pmatrix} 396 \\ 200 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Optimisation non linéaire – corrigé (9 décembre 2016)

2.

$$\begin{aligned} d &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \nabla f(b)^T \cdot d &= \begin{pmatrix} 396 & 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 792 - 200 = 592 > 0 \end{aligned}$$

Cela veut dire que d est une direction de montée, pas de descente, en b.

Solution de la question 3:

Nous avons

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$f(x) = 81 + 2 = 83.$$

1. L'itéré suivant est

$$x^+ = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2\alpha x_1 \\ x_2 - 4\alpha x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 18\alpha \\ 1 - 4\alpha \end{pmatrix}.$$

La valeur de la fonction à cet itéré est

$$f(\alpha) = (9 - 18\alpha)^2 + 2(1 - 4\alpha)^2 = 356\alpha^2 - 340\alpha + 83.$$

Comme $d_k = -\nabla f(x)$,

$$\nabla f(x)^T d_k = -(18^2 + 4^2) = -340.$$

La condition de Wolfe s'écrit donc

$$356\alpha^2 - 340\alpha + 83 \leq 83 - \alpha \frac{1}{100} 340.$$

Si $\alpha = 1$, on obtient

$$99 \leq 79.6$$

et la condition n'est pas vérifiée. En effet, la valeur de la fonction objectif a augmenté de 83 à 99. Divisons le pas par 2. Pour $\alpha = 1/2$, nous avons

$$2 \leq 81.3.$$

Cette fois-ci, la condition est vérifiée, et la diminution de 83 à 2 est considérée comme suffisante. Le nouvel itéré est donc

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. La direction de Newton est

$$d_n = -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Une itération de la méthode de Newton est

$$x^+ = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha d_N = (1-\alpha)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La valeur de la fonction a cet itéré est

$$f(\alpha) = (1-\alpha)^2 x_1^2 + 2x_2^2 = 83(1-\alpha)^2.$$

De plus,

$$\nabla f(x)^T d_N = -2x_1^2 - 4x_2^2 = -166.$$

La condition de Wolfe s'écrit donc

$$83(1-\alpha)^2 \leq 83 - \alpha\frac{1}{100}166.$$

Elle est vérifiée pour $\alpha = 1$. La valeur de la fonction diminue de 83 à 0. Le nouvel itéré est

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'avère que c'est la solution optimale du problème. Il n'y a pas d'autres itérations à effectuer.