Optimisation non linéaire – corrigé (16 décembre 2016)

Solution de la question 1:

Le gradient de la fonction :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Le Hessien :

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

L'inverse du Hessien :

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$H^{-1}(x)\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}^2$ quelconque, nous avons

$$x^+ = x - H^{-1}(x)\nabla f(x) = x - x = (0, 0).$$

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit de la solution optimale du problème.

Solution de la question 2:

Nous avons $f(0, 0) = 0$. On calcule le gradient :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 1 \\ -4x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

le Hessien :

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Afin de créer une matrice positive définie, on ajoute $5I$ a la matrice initiale.

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et son inverse :

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La direction de Newton en (0,0) est donc

$$d_N = -\begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le nouvel itéré obtenu en faisant un pas de α dans cette direction sera donc

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1/7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha/7 \\ -2\alpha \end{pmatrix}.$$

La valeur de la fonction objectif est

$$f(x^+) = \frac{-391}{49}\alpha^2 - \frac{29}{7}\alpha.$$

Nous constatons que, quelque soit $\alpha > 0$, la valeur de la fonction objectif va **diminuer**.

1er condition de Wolfe :

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + a_k \beta_1 \nabla f(x_k)^T d_k$$

$$-\frac{391}{49}\alpha^2 - \frac{29}{7}\alpha \leq \alpha\beta_1(1 \quad 2)\begin{pmatrix} \frac{-1}{7} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{391}{49}\alpha^2 - \frac{29}{7}\alpha \leq \alpha\frac{-29}{7}\beta_1$$

$$\beta_1 \leq 1.93\alpha + 1$$

qui est satisfaite en choisissant $\beta_1 = 0.5$ et $\alpha > 0$.

2em condition de Wolf :

$$\frac{\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k}{\nabla f(x_k)^T d_k} \leq \beta_2$$

$$= \frac{(-2\alpha/7 + 1 \quad 8\alpha + 2)\begin{pmatrix} -1/7 \\ -2 \end{pmatrix}}{(1 \quad 2)\begin{pmatrix} -1/7 \\ -2 \end{pmatrix}} \leq \beta_2$$

$$= \frac{-782\alpha - 203}{-210} \leq \beta_2$$

$\beta_2 = 0.98$, $\alpha \leq 0.0039$.

2. La direction

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est une direction de descente en (0,0). Le nouvel itéré obtenu en faisant un pas de α dans cette direction sera donc

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

La valeur de la fonction objectif est

$$f(x^+) = -\alpha^2 - 2\alpha.$$

Cette fonction n'est pas bornée inférieurement, et n'a donc pas de minimum local.

Solution de la question 3:

1. La matrice hessienne de f est donnée par Q pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Q étant une matrice diagonale avec des éléments diagonaux strictement positifs, on en conclut qu'elle est définie positive et que, par conséquent, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^3$.
   L'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ est donc donné par la solution unique du système d'équations $Qx = -b$ qui peut se réécrire comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ 5x_2 = -1 \\ 25x_3 = -1 \end{cases}$$

   On trouve alors :

$$\begin{cases} x_1^* = -1 \\ x_2^* = -\frac{1}{5} \\ x_3^* = -\frac{1}{25} \end{cases}$$

   L'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$x^* = (x_1^*\ x_2^*\ x_3^*)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

2. Le gradient de f est donné par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ 5x_2 + 1 \\ 25x_3 + 1 \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

La direction de la plus forte pente pour f en x^0 est par définition :

$$d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$