Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Optimisation en nombres entiers – corrigé (25 Novembre 2016)

## Question 1:

1. On peut modéliser ce problème par un graphe où chaque noeud représente un type de jouet en plastique et les arcs représentent la transition de la production du jouet $i$ au jouet $j$. On associe à chaque arc un coût $c_{ij}$, défini par le coût de transition.
2. Dans ce graphe, une solution admissible est un cycle qui visite tous les noeuds exactement une fois. En effet, à la fin du mois, il faut revenir à la configuration initiale pour recommencer le mois suivant. Ce problème est donc équivalent au problème du voyageur de commerce dans ce graphe.
3. Une solution optimale est un tel cycle avec le coût minimal.
4. Pour chaque paire de types de jouet $(i, j)$, nous définissons $x_{ij}$ variable binaire. Elle vaut 1 si l'usine utilise la configuration de production $J_j$ juste après $J_i$, et 0 sinon. Le problème est alors modélisé comme un problème du voyageur de commerce représenté par les équations (25.56) et (25.57) dans le livre :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1..n} \sum_{j \neq i} c_{ij} x_{ij} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, ..., n, \\
& \sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 && \forall j = 1, ..., n, \\
& x_{ij}(n-1) + y_i - y_j \leq n-2 && \forall i = 2, ..., n, j = 2, ..., n, i \neq j, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, ..., n, j = 1, ..., n, i \neq j, \\
& y_i \geq 0 && \forall i = 1, ..., n.
\end{aligned}
$$

## Question 2:

Nous avons les variables de décision suivantes :

1. $x_1$ : Asmodée
2. $x_2$ : Belphégor,
3. $x_3$ : Belzébuth,
4. $x_4$ : Léviathan,
5. $x_5$ : Lucifer,
6. $x_6$ : Mammon,
7. $x_7$ : Satan.

1. Vous ne pouvez pas choisir tous les ouvriers :
$$\sum_{i=1}^{7} x_i \leq 6.$$
2. Vous devez choisir au moins un de ces ouvriers :
$$\sum_{i=1}^{7} x_i \geq 1.$$
3. Asmodée ne peut pas être engagé si Belzébuth l'est :
$$x_1 + x_3 \leq 1.$$
4. Léviathan peut être engagé seulement si Belphégor l'est :
$$x_4 \leq x_2.$$
5. Concernant les ouvriers Asmodée et Lucifer, vous devez soit les engager tous les deux, soit aucun des deux :
$$x_1 = x_5.$$
6. Nous définissons deux variables binaires supplémentaires $y_1$ et $y_2$. $y_1$ vaut 1 si l'on sélectionne un ouvrier dans le groupe 1, et 0 sinon. $y_2$ est défini de la même manière pour le groupe 2. Nous obtenons les contraintes :
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq y_1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 2y_2 \\ y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}$$

## Question 3:

Pour chaque chantier $i$ et chaque semaine $s$, nous définissons une variable de décision binaire $x_{is}$ qui vaut 1 si le chantier $i$ démarre à la semaine $s$, et 0 sinon.

Afin que tous les chantiers soient terminés après 9 semaines, leur démarrage ne doit pas se faire trop tard. Nous définissons le paramètre

$$V_i = 9 - p_i,$$

qui est la dernière semaine pendant laquelle le chantier $i$ peut commencer afin qu'il soit terminé après 9 semaines.

Afin d'identifier le nombre d'ouvriers requis par un chantier spécifique lors d'une semaine donnée, nous définissons pour chaque chantier $i$, chaque semaine de début $s$, et chaque semaine effective $t$ le paramètre $\ell_{ist}$, qui représente le nombre d'ouvriers requis par le chantier $i$ lors de la semaine $t$, si le chantier débuter à la semaine $s$. Par exemple, les valeurs de ces paramètres pour le chantier 1 sont données dans le tableau suivant.

| Hautes Ecoles | Semaine $t$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Semaine de démarrage ($s$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

1. Nous définissons les contraintes suivantes :
   — Chaque semaine $t$, le nombre total d'ouvriers ne doit pas dépasser $L_t$ :

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{s=1}^{9} x_{is}\ell_{ist} \leq L_t, \quad t = 1, \ldots, 9.$$

— Chaque chantier $i$ doit commencer exactement l'une des semaine, et au plus tard la semaine $V_i$ :

$$\sum_{s=1}^{V_i} x_{is} = 1, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

— Et, bien entendu, les variables sont binaires :

$$x_{is} \in \{0, 1\}, \quad , i = 1, \ldots, 5, s = 1, \ldots, 9.$$

2. Nous définissons la variable entière $y^{\max}$ représentant le nombre maximum d'ouvriers. Le problème peut ainsi s'écrire

$$\min \quad y^{\max}$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} \sum_{s=1}^{9} x_{is} \ell_{ist} &\leq L_t, \quad t = 1, \ldots, 9. \\
\sum_{i=1}^{5} \sum_{s=1}^{9} x_{is} \ell_{ist} &\leq y^{\max}, \quad t = 1, \ldots, 9. \\
\sum_{s=1}^{V_i} x_{is} &= 1, \quad i = 1, \ldots, 5. \\
x_{is} &\in \{0, 1\}, \quad , i = 1, \ldots, 5, s = 1, \ldots, 9.
\end{aligned}$$

3. Le numéro de la semaine à laquelle débute la tâche $i$ est

$$\sum_{s=1}^{9} s x_{is}.$$

Dès lors la contrainte s'écrit

$$\sum_{s=1}^{9} s x_{3s} - \sum_{s=1}^{9} s x_{1s} \geq 2.$$

4. Nous introduisons la contrainte :

$$x_{5s} \leq x_{4,s+1} + x_{4s} \qquad s \in \{1, ..., 8\}$$