Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Optimisation en nombres entiers – corrigé (2 Décembre 2016)

Question 1:

Les détails sont repris à la Figure 1.

A chaque noeud, la borne supérieure UB représente la meilleure valeur admissible trouvée jusque là (notée f^* dans l'algorithme 26.2). La borne inférieure est la solution de la relaxation linéaire ($f(x_R^*)$ dans l'algorithme 26.2).

Au noeud racine, comme nous n'avons pas encore obtenu de solution entière, la borne supérieure est $+\infty$ (voir étape 9 de l'algorithme 26.2). La solution du problème relaxé est $x_1^* = 4/3$, $x_2^* = 4/3$. Comme nous branchons sur x_1, nous introduisons d'une part la contrainte

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1,$$

et d'autre part

$$x_1 \geq \left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil = 2.$$

On a trouvé deux solutions au problème : $(0, 2)$ et $(3, 1)$, avec la valeur optimale 6.

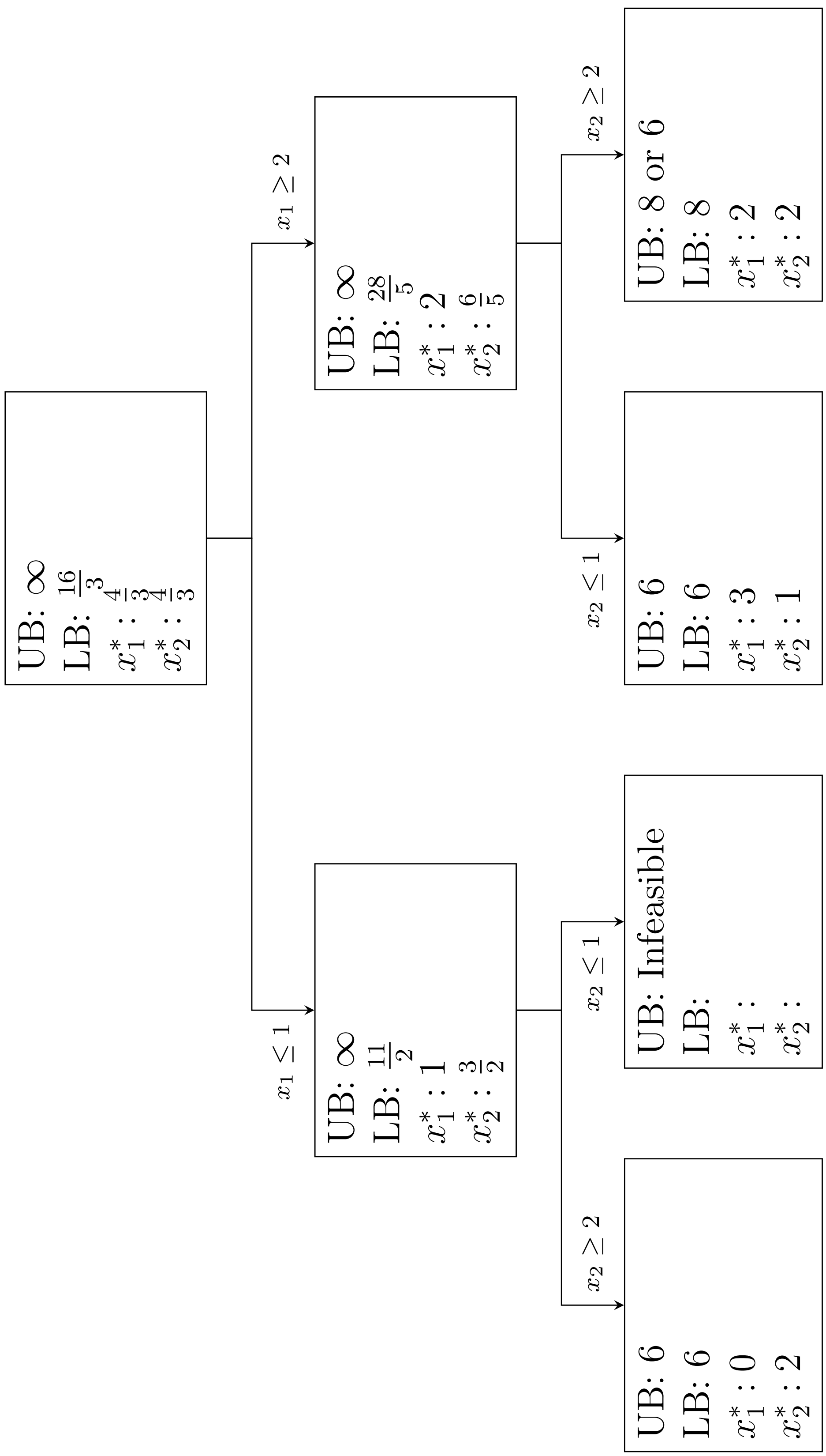

FIGURE 1 – Arbre de Branch & Bound

Question 2:

1. La région admissible est représentée graphiquement à la Figure 2.
2. La liste des solutions admissibles est

x_1	x_2	x_1	x_2
7	0	5	3
8	0	4	4
6	1	3	5
7	1	2	6
5	2	1	7
6	2		

3. La même région admisslble avec le nouveau polyèdre est représentée à la Figure 3.

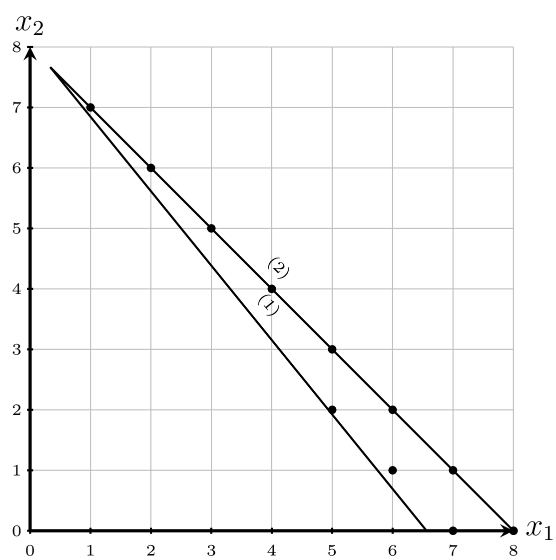

FIGURE 2 – Région admissible avec le polyèdre de départ

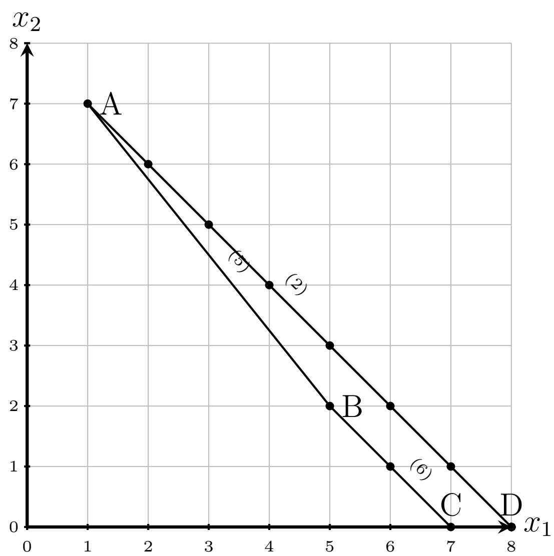

Figure 3 – Polyèdre avec les sommets aux coordonnées en nombres entiers

Le polyèdre avec des sommets entiers a comme sommets les points A(1,7), B(5,2), C(7,0) et D(0,8). Il est caractérisé par les contraintes suivantes :

$$5x_1 + 4x_2 \geq 33 \tag{5}$$

$$x_1 + x_2 \geq 7 \tag{6}$$

$$x_1 + x_2 \leq 8 \tag{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3}$$

Il est aisé de vérifier que la liste des solutions admissibles n'a pas changé.

Question 3:

Pour calculer une borne supérieure, il suffit de considérer une affectation arbitraire. Par exemple, $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D, 4 \to B, 5 \to E$. Le coût total de cette affectation est $39 + 24 + 31 + 45 + 18 = 157$. Nous obtenons donc $f^* = 157$.

Appelons le problème P. Il est aisé de calculer une bonne inférieure pour P.

1. Le coût minimum pour la personne 1 est 39.
2. Le coût minimum pour la personne 2 est 22.
3. Le coût minimum pour la personne 3 est 31.
4. Le coût minimum pour la personne 4 est 23.
5. Le coût minimum pour la personne 5 est 18.

Dès lors, le coût total ne peut pas être inférieur à $39+22+31+23+18 = 133$ et $\ell(P) = 133$.

Nous séparons maintenant le problème P en 5 sous-problèmes. Pour chacun d'eux, nous fixons l'affectation d'une tâche à l'ouvrier 1, et recalculons la borne inférieure.

[P_A] $1 \to A$. $\ell(P_A) = 39 + 22 + 31 + 23 + 18 = 133$.

[P_B] $1 \to B$. $\ell(P_B) = 65 + 22 + 31 + 23 + 18 = 159$. Comme $159 \geq f^* = 157$, nous supprimons ce sous-problème.

[P_C] $1 \to C$. $\ell(P_C) = 69+22+31+23+18 = 163$. A nouveau, $163 \geq f^* = 157$, et nous supprimons ce sous problème.

[P_D] $1 \to D$. $\ell(P_D) = 66 + 22 + 45 + 45 + 18 = 196$. Sous-problème supprimé.

[P_E] $1 \to E$. $\ell(P_E) = 57 + 24 + 31 + 23 + 30 = 165$. Sous-problème supprimé.

Tous les sous-problèmes ont été supprimés, sauf P_A. Nous le décomposons à nouveau, en affectant une tâche à l'ouvrier 2.

[P_{AB}] $1 \to A, 2 \to B$. $\ell(P_{AB}) = 39 + 84 + 31 + 23 + 18 = 195 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

[P_{AC}] $1 \to A, 2 \to C$. $\ell(P_{AC}) = 39 + 24 + 31 + 23 + 18 = 135$.

[P_{AD}] $1 \to A, 2 \to D$. $\ell(P_{AD}) = 39 + 92 + 45 + 45 + 18 = 239 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

[P_{AE}] $1 \to A, 2 \to E$. $\ell(P_{AE}) = 39 + 22 + 31 + 23 + 30 = 145$.

Restent les sous-problèmes P_{AC} et P_{AE}. Trairons d'abord P_{AE}, et affectons une tâche à la troisième personne.

[P_{AEB}] $1 \to A, 2 \to E, 3 \to B$. $\ell(P_{AEB}) = 39+22+50+23+30 = 164 \geq f^*$. Supprimé.

[P_{AEC}] $1 \to A, 2 \to E, 3 \to C$. $\ell(P_{AEC}) = 39+22+61+45+18 = 185 \geq f^*$. Supprimé.

[P_{AED}] $1 \to A, 2 \to E, 3 \to D$. $\ell(P_{AED}) = 39+22+31+45+30 = 167 \geq f^*$. Supprimé.

Nous pouvons donc supprimer le sous-problème P_{AE}. Traitons maintenant le sous-problème P_{AC}.

[P_{ACB}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to B$. $\ell(P_{ACB}) = 39 + 24 + 50 + 23 + 18 = 154$.

[P_{ACD}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D$. $\ell(P_{ACD}) = 39+24+31+45+18 = 157 \geq f^*$. Supprimé.

[P_{ACE}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to E$. $\ell(P_{ACE}) = 39+24+45+23+34 = 165 \geq f^*$. Suprrimé.

Le seul sous-problème restant est P_{ACB}. Affectons maintenant une tâche au quatrième ouvrier (et donc, automatiquement, au cinquième aussi).

[P_{ACBD}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to B, 4 \to D$. $\ell(P_{ACBD}) = 39+24+50+23+18 = 154$. Il s'agit d'une solution admissible. Comme $f^* > 154$, nous mettons à jour la borne supérieure $f^* = 154$.

P_{ACBE} $1 \to A, 2 \to C, 3 \to B, 4 \to E$. $\ell P_{ACBE} = 39 + 24 + 50 + 50 + 34 = 197 > f^* = 154$. Supprimer.

L'affectation optimale est donc la solution du sous-problème P_{ACBD}, c'est-à-dire : $1 \to A, 2 \to C, 3 \to B, 4 \to D, 5 \to E$. Le coût optimal est 154.