Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

TRANSP-OR

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Modélisation (23 septembre 2016)

Question 1:

Nous voulons déterminer le parallélipipède de volume unitaire et de surface minimale.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) les contraintes.
2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.

Question 2:

Une banque veut déterminer comment investir ses actifs pour l'année à venir. À l'heure actuelle, la banque a un million d'euros qu'elle peut investir dans des obligations, des prêts immobiliers, des baux à loyer ou des prêts personnels. Les taux d'intérêt annuels des différents types de placements sont de 6% pour les obligations, 10% pour les prêts immobiliers, 8% pour les baux et 13% pour les prêts personnels.

Afin de minimiser les risques, le portefeuille sélectionné par la banque doit satisfaire les restrictions suivantes :

— Le montant alloué aux prêts personnels ne doit pas dépasser la moitié de celui investi dans des obligations.
— Le montant alloué à des prêts immobiliers ne doit pas dépasser celui alloué aux baux.
— Au plus 20% du montant total investi peut être affecté à des prêts personnels.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) la/les contrainte(s).

2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.
3. Formuler ce problème comme un problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision.

Question 3:

Les prix de vente d'un certain nombre de maisons dans une partie de la ville avec vue sur le lac sont donnés dans le tableau suivant, ainsi que la taille du lot et son élévation :

Prix de vente (CHF) P_i	Lot size (m^2) L_i	Elevation (mètres) E_i
1 550 000	12 000	350
1 200 000	10 000	300
1 000 000	9 000	100
700 000	8 000	200
600 000	6 000	100
1 000 000	9 000	200

Un agent immobilier veut construire un modèle de régression linéaire pour prévoir les prix de vente des autres maisons dans cette partie de la ville à partir de leurs tailles de lot et élévations. L'agent estime qu'un modèle linéaire de la forme

$$P = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 E$$

serait raisonnablement précis et facile à utiliser. Les coefficients β_1 et β_2 indiquent comment le prix varie selon la taille du lot et l'élévation, respectivement, tandis que β_0 représente un prix de référence moyen pour cette section de la ville, et est appelé la "constante".

L'agent souhaite sélectionner le "meilleur" modèle linéaire possible, c'est-à-dire trouver la valeur des coefficients β_0, β_1 et β_2 qui permettent au modèle de reconstituer les données au mieux. Pour chaque observation i, le prix prédit par le modèle est

$$\widehat{P}_i = \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i \quad i = 1, 2, ..., 6. \tag{1}$$

1. Formuler un problème d'optimisation pour trouver la "meilleure" valeur de β_0, β_1, et β_2, en minimisant les écarts au carré :

$$\sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \widehat{P}_i)^2.$$

2. Proposer la formulation d'un problème d'optimisation **linéaire** pour minimiser les critères suivants
   (a) $\sum_{i=1,\ldots,6} |P_i - \widehat{P}_i|$,
   (b) $\max_{i=1,\ldots,6} |P_i - \widehat{P}_i|$.

Question 4:

En utilisant des données historiques, le directeur d'une usine de production sait que lorsqu'il varie son taux de production, il encourt des coûts supplémentaires. Lorsque la production est augmentée d'un mois à l'autre, il estime que le coût par unité augmente de 0.50 CHF. D'autre part, la réduction de la production génère une augmentation des coûts de production de 0.25 CHF par unité. Un rythme de production lisse est évidemment souhaitable pour éviter ces coûts supplémentaires.

Les prévisions de ventes pour les douze prochains mois sont (en milliers) :

Juillet : 4	Octobre : 12	Janvier : 20	Avril : 6
Août : 6	Novembre : 16	Février : 12	Mai : 4
Septembre : 8	Décembre : 20	Mars : 8	Juin : 4

Le calendrier de production du mois de juin a déjà été fixé à 4000 unités. Au 1er juillet, le niveau de l'inventaire devrait être de 2000 unités. Le stockage est disponible pour seulement 10000 unités à tout moment. Les coûts d'inventaire sont négligeables. Formuler un problème d'optimisation pour planifier la production pour l'année à venir, afin de minimiser le coût des changements des taux de production tout en répondant à toutes les demandes de vente.

(Astuce : Exprimer le changement de production du mois t au mois $t+1$ en termes de variables non négatives x_t^+ et x_t^-)