Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Modélisation – corrigé (23 septembre 2016)

Solution de la question 1:

1. Considérons un parallélépipède P.
   - Variables de décision : longueur x, largeur y, hauteur z.
   - Fonction objectif : surface de P :

   $$f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$

   - Contrainte : volume unitaire

   $$xyz = 1$$

   Problème d'optimisation :

   $$\min 2(xy + xz + yz)$$

   sous contraintes

   $$\begin{aligned} xyz &= 1 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Autre formulation

   $$\min 2(xy + xz + yz)$$

   sous contraintes

   $$\begin{aligned} xyz &\leq 1 \\ -xyz &\leq -1 \\ -x &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \\ -z &\leq 0 \end{aligned}$$

Solution de la question 2:

1. Les variables de décision sont les montants investis pour les obligations (x_1), les prêts immobiliers (x_2), les baux (x_3) et les prêts personnels (x_4), exprimées en millions d'euros. La banque veut maximiser les rendements donnés par

$$\max 1.06x_1 + 1.10x_2 + 1.08x_3 + 1.13x_4$$

   sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 &\leq 0.5x_1 \\ x_2 &\leq x_3 \\ x_4 &\leq 0.2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Le problème peut s'écrire

$$\min -1.06x_1 - 1.10x_2 - 1.08x_3 - 1.13x_4$$

   sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\leq -1 \\ x_4 &\leq 0.5x_1 \\ x_2 &\leq x_3 \\ x_4 &\leq 0.2 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \\ -x_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

3. Le problème peut aussi s'écrire

$$\max 1.06x_1 + 1.10x_2 + 1.08x_3 + 1.13x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_4 + x_5 &= 0.5x_1\\
x_2 + x_6 &= x_3\\
x_4 + x_7 &= 0.2\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
\end{aligned}$$

Bien que non demandé dans l'énoncé, il est conseillé de l'écrire comme ceci

$$\max 1.06x_1 + 1.10x_2 + 1.08x_3 + 1.13x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
-0.5x_1 + x_4 + x_5 &= 0\\
x_2 - x_3 + x_6 &= 0\\
x_4 + x_7 &= 0.2\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
\end{aligned}$$

Solution de la question 3:

1. Nous commençons par définir les variables de décision :
   - $\widehat{P}_i$: prix de vente prédit pour l'observation i, $i = 1, \ldots, 6$,
   - β_0 : constante,
   - β_1 : coefficient de la taille du lot,
   - β_2 : coefficient de l'élévation.

   La fonction objectif est simplement

   $$\sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \widehat{P}_i)^2.$$

   Les contraintes définissent le prix de vente prédit par le modèle pour chaque observation :

   $$\widehat{P}_i = \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i \quad i = 1, \ldots, 6,$$

   de sorte que le problème d'optimisation est écrit comme suit :

   $$\min \sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \widehat{P}_i)^2,$$

   sous contraintes

   $$\widehat{P}_i = \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i \quad i = 1, \ldots, 6.$$

   En remplaçant les contraintes dans la fonction objectif, nous obtenons un problème d'optimisation sans contrainte :

   $$\min \sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \beta_0 - \beta_1 L_i - \beta_2 E_i)^2.$$

2. Nous introduisons pour chaque i une nouvelle variable Q_i représentant la valeur absolue. La fonction objectif s'écrit

   $$\min \sum_{i=1}^{6} Q_i.$$

   Pour définir Q_i, nous devons inclure les contraintes suivantes :

   $$P_i - \widehat{P}_i \leq Q_i \qquad i = 1, \ldots, 6,$$

et

$$\widehat{P}_i - P_i \leq Q_i \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Notez que cette formulation fonctionne parce que nous essayons de minimiser les sommes de Q_i. En effet, les deux contraintes en tant que telles ne sont pas suffisantes pour caractériser que Q_i est la valeur absolue de $P_i - \widehat{P}_i$. Mais comme nous minimisons, l'une des deux contraintes sera active à la solution pour chaque i, de sorte que Q_i sera effectivement égal à la valeur absolue, à l'optimum.

3. Nous introduisons une nouvelle variable R qui représente la plus grande valeur absolue, de sorte que la fonction objectif est écrit

$$\min R$$

Pour définir R, nous devons inclure les contraintes suivantes, dans le même esprit que la question précédente :

$$P_i - \widehat{P}_i \leq R \qquad i = 1, \ldots, 6,$$

et

$$\widehat{P}_i - P_i \leq R \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Notez encore que cela fonctionne parce que nous minimisons R. A la solution, l'une des contraintes sera active, et R sera égal à la valeur absolue maximale.

Solution de la question 4:

Nous présentons d'abord les notations pour les données du problème :

— d_t est la demande du mois t, $t = 1, \ldots, 12$, avec la convention que juillet correspond à $t = 1$ (par exemple $d_1 = 4$, $d_2 = 6$).

— $c^+ = 0.5$ est la pénalité pour augmenter la production,

— $c^- = 0.25$ est la pénalité pour diminuer la production.

Nous définissons les variables de décision suivantes :

— ℓ_t : niveau d'inventaire au début du mois t, $t = 1, \ldots, 12$,

— p_t : la production du mois t, $t = 0, \ldots, 12$,

— x_t^+ : augmentation de la production au début du mois t, $t = 1, \ldots, 12$:

$$x_t^+ = \max(0, p_t - p_{t-1}).$$

— x_t^- : diminution de la production au début du mois t, $t = 1, \ldots, 12$:

$$x_t^- = \max(0, p_{t-1} - p_t).$$

La fonction objectif vise à minimiser les coûts encourus par les changements de taux de production :

$$\min \sum_{t=1}^{12} c^+ x_t^+ + \sum_{t=1}^{12} c^- x_t^-.$$

Comme les variables x^+ et x^- sont impliquées dans une minimisation, nous pouvons les définir en utilisant les contraintes d'inégalité :

$$x_t^+ \geq p_t - p_{t-1} \quad t = 1, \ldots, 12,$$

et

$$x_t^- \geq p_{t-1} - p_t \quad t = 1, \ldots, 12.$$

En effet, pour chaque t, l'une de ces deux contraintes sera active à la solution, de sorte que toutes les variables soient correctement définie.

Le niveau des stocks au début du mois t est défini comme suit

$$\ell_{t+1} = \ell_t + p_t - d_t, \quad t = 1, \ldots, 11,$$

Les conditions initiales peuvent être écrites comme

$$\ell_1 = 2000$$

et

$$p_0 = 4000.$$

Comme le stockage est limité, nous avons

$$\ell_t \leq 10000, \quad t = 1, \ldots, 12$$

Par ailleurs, afin de satisfaire la demande, l'inventaire ne peut pas devenir négatif :

$$\ell_t \geq 0, \quad t = 0, \ldots, 12.$$

En mettant tout ensemble, nous avons

$$\min \sum_{t=1}^{12} c^+ x_t^+ + \sum_{t=1}^{12} c^- x_t^-.$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_t^+ &\geq p_t - p_{t-1}, && t = 1, \ldots, 12, \\
x_t^- &\geq p_{t-1} - p_t, && t = 1, \ldots, 12, \\
\ell_{t+1} &= \ell_t + p_t - d_t, && t = 1, \ldots, 11, \\
\ell_t &\leq 10000, && t = 1, \ldots, 12, \\
\ell_1 &= 2000, && \\
p_0 &= 4000, && \\
\ell_t &\geq 0, && t = 1, \ldots, 12, \\
p_t &\geq 0, && t = 0, \ldots, 12, \\
x_t^+ &\geq 0, && t = 1, \ldots, 12, \\
x_t^- &\geq 0, && t = 1, \ldots, 12.
\end{aligned}$$