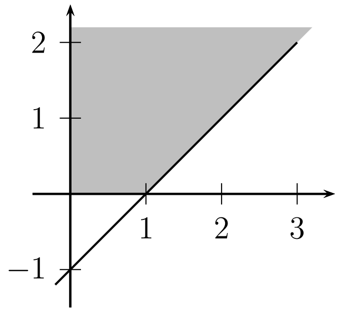
Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

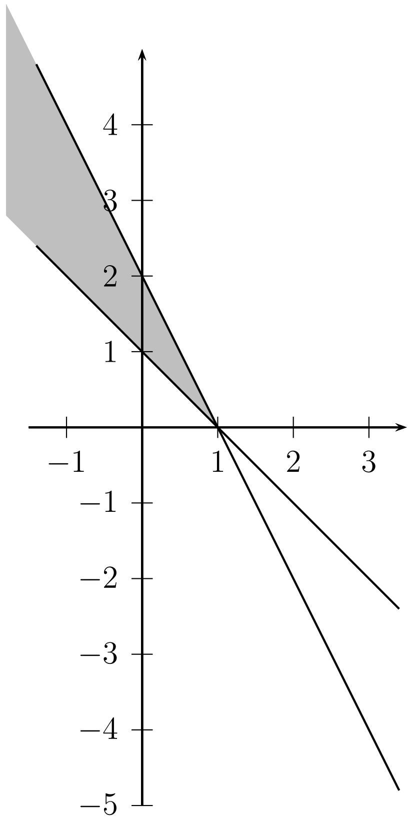
Introduction à l'optimisation linéaire–corrigé (30 septembre 2016)

Solution de la question 1:

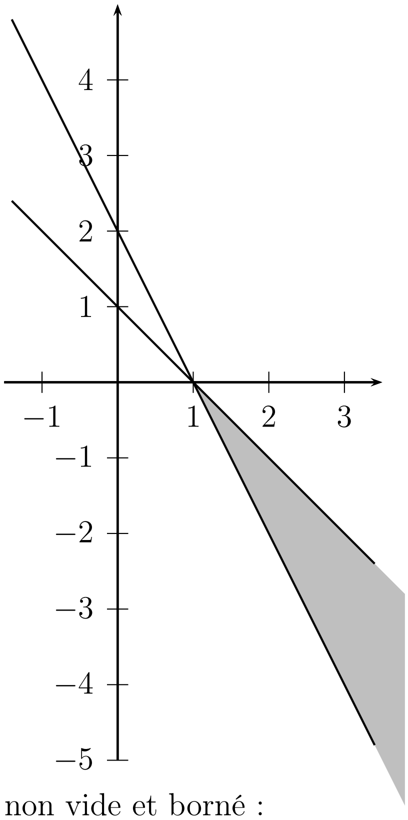
1. Domaine admissible non vide et non borné :



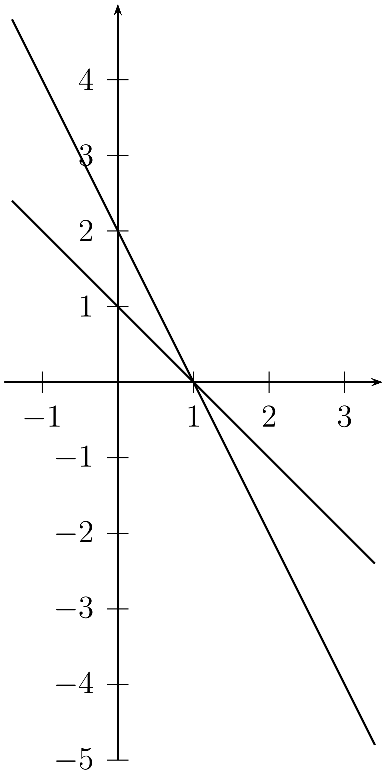
2. Domaine admissible non vide et non borné :



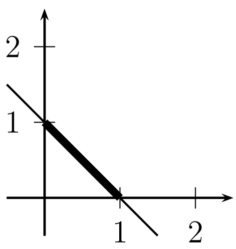
3. Domaine admissible non vide et non borné :



4. Domaine admissible non vide et borné :



5. Domaine admissible non vide et borné :



Solution de la question 2:

1. Les solutions de base sont A(0, 0), B(2, 0), C(8/3,-4/3), D(4, 0), E(9, 0), F(6, 2), G(9, 5), H(3/2, 5), I(0, 5), J(-3/2, 7), K(-1/2, 5), L(0, 4) et M(0, 6).
2. Les solutions de base admissible B(2, 0), D(4, 0), F(6, 2), H(3/2, 5), I(0, 5) et L(0, 4).
3. Le problème d'optimisation en forme standard est

$$\min -x_1 - x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 18 \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_6 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Le point F(6, 2) correspond au point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6, 2, 3, 0, 0, 10)$. Les variables x_1, x_2, x_3, x_6 sont en base et x_4, x_5 sont hors base.
5. Pour le problème en forme standard, le point (4,3) correspond au point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 3, 2, 1, 3, 7)$. C'est une solution admissible car toutes les contraintes sont vérifiées. Pour que ce soit une solution de base admissible, il faudrait qu'au moins deux variables aient une valeur nulle. En effet, $n = 6$ et $m = 4$. Il doit donc y avoir 4 variables en base, et 2 hors de la base, ces deux dernières étant nulles.

Solution de la question 3:

1. Si les indices de base sont 1,2, et 3, la matrice de base est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dont l'inverse s'écrit :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur b étant $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, les variables de base valent

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

La variable hors-base x_4 vaut par définition 0.
Cette solution est admissible.

2. Calculons le coût réduit pour la variable x_4 : Comme

$$B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

nous avons

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 2 - 1 = 1 > 0$$

La variable x_4 ne réduit pas le coût. La solution de base d'indices 1,2 et 3 correspond donc à l'optimum du problème.