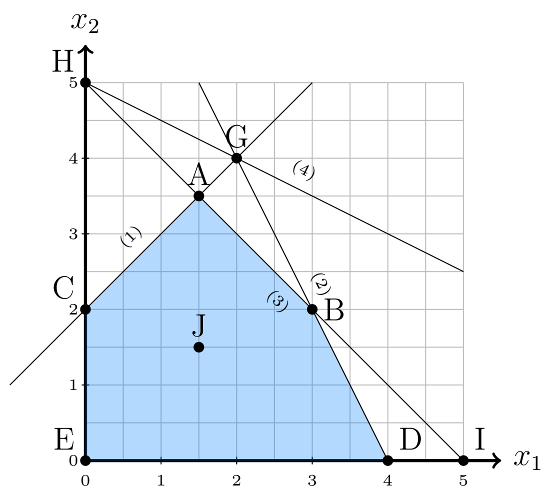
Introduction à l'optimisation linéaire (14 octobre 2016)

Question 1:

Considérer le domaine admissible défini par les contraintes suivantes :

$$x_1 - x_2 \geq -2, \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8, \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 5, \quad (3)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad (4)$$
$$x_1 \geq 0, \quad (5)$$
$$x_2 \geq 0. \quad (6)$$



1. Ecrire le domaine admissible sous forme standard.
2. Quelles sont les solutions associées aux points A, G, I et J ? De quel type de solution s'agit-il ?
3. Lister toutes les solutions de base correspondant au point G et montrer qu'elles ne sont pas admissibles.
4. Montrer toutes les directions de base admissibles en B.
5. Ecrire le nombre minimal de contraintes pour représenter le domaine délimité par les points E, C, A, B, D en vous aidant le la représentation graphique.

Question 2:

Transformer le problème suivant en forme standard :

$$\max -5x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 &\leq -4 \\ x_1 &\geq -2, \\ 0 \leq x_2 &\leq 4, \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Question 3:

Soit le problème d'optimisation lineaire suivant

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

sous contraintes

$$x_1 + x_2 \leq 1, \tag{1}$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \tag{2}$$
$$x_3 \leq 1, \tag{3}$$
$$2x_1 \geq 1, \tag{4}$$
$$x_1 + 3x_3 \leq 5, \tag{5}$$
$$x_1 \geq 0, \tag{6}$$
$$x_2 \geq 0, \tag{7}$$
$$x_3 \geq 0. \tag{8}$$

Si la solution $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, \alpha)$ est optimale, alors donner les contraintes actives, les contraintes inactives et la valeur de α.

Question 4:

Soit un problème d'optimisation linéaire en forme standard avec $n = 6$ variables et $m = 2$ contraintes d'égalité. Si le problème est incompatible (*infeasible*), le nombre de solutions vérifiant toutes les contraintes est

1. supérieur ou égal à 6,
2. 0,
3. infini,
4. supérieur ou égal à 2.

Question 5:

Une contrainte qui n'a pas d'impact sur le domaine admissible est une contrainte

1. non-négative,
2. redondante,
3. standard,
4. d'écart.

Question 6:

Une solution *admissible* d'un problème d'optimisation linéaire

1. doit vérifier toutes les contraintes simultanément,
2. doit vérifier au plus une contrainte,
3. se trouve sur les bords du domaine admissible,
4. est optimale.

Question 7:

Soit le polytope sous forme standard $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Soit B la matrice comportant les colonnes de la matrice A correspondant aux variables en base et P la matrice de permutation telle que $AP = (B \quad N)$. Le vecteur $x = P\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{bmatrix}$ est un sommet de Q si :

1. B est singulière,
2. $B^{-1}b \geq 0$,
3. $Q = \emptyset$,
4. il n'y a pas de direction admissible.

Question 8:

Le domaine admissible défini par les contraintes

$$
\begin{aligned}
x - y &\geq 0 \\
x + y &\geq 0 \\
x &\geq 3 \\
y &\geq 3
\end{aligned}
$$

1. est vide,
2. a un sommet et est borné,
3. a un sommet et est non borné,
4. a trois sommets et est non borné.