Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2016–2017)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Yousef Maknoon

Introduction à l'optimisation linéaire – corrigé (14 octobre 2016)

Solution de la question 1:

1. La forme standard du domaine s'écrit $Ax = b, x \geq 0$. On introduit les variables $e_1, e_2, \ldots, e_4 \geq 0$ de manière à l'écrire sous forme standard :

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + e_1 &= 2, & (1)\\ 2x_1 + x_2 + e_2 &= 8, & (2)\\ x_1 + x_2 + e_3 &= 5, & (3)\\ x_1 + 2x_2 + e_4 &= 10, & (4)\\ x_1, x_2 &\geq 0, & (5)\\ e_1, e_2, e_3, e_4 &\geq 0 & (6) \end{aligned}$$

2. Chaque solution est représentée par le vecteur suivant : $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$.
$A = (1.5, 3.5, 0, 1.5, 0, 1.5)$ Solution de base admissible
$G = (2, 4, 0, 0, -1, 0)$ Solution de base dégénérée et non admissible
$I = (5, 0, 7, -2, 0, 5)$ Solution de base et non admissible
$J = (1.5, 1.5, 2, 3.5, 2, 5.5)$ Solution admissible

3. Il y a trois solutions de base au point G :
   (a) $x_{b1} = (x_1, x_2, e_1, e_3)$
   (b) $x_{b2} = (x_1, x_2, e_2, e_3)$
   (c) $x_{b3} = (x_1, x_2, e_3, e_4)$

   (a) Pour x_{b1}, on a $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

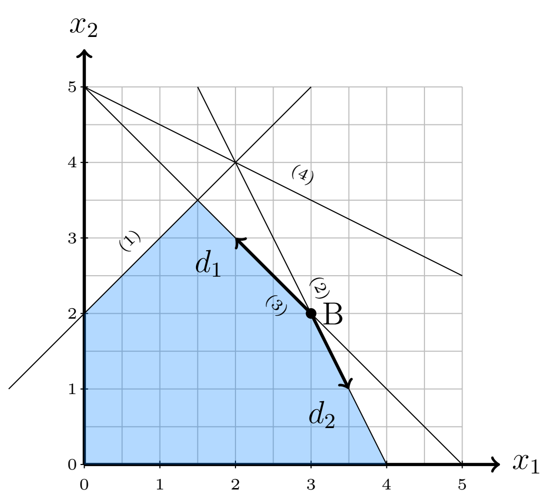
   et $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui viole la condition d'admissibilité $B^{-1}b \ngeq 0$.

   (b) Pour x_{b2}, on a $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ngeq 0.$

(c) Pour x_{b3}, on a $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq 0$.

On note également que ces trois solutions sont dégénérées car pour chacune des solutions, une des variables en base est nulle.

4. La solution de base en B est $B = (3, 2, 3, 0, 0, 3)$. e_2 et e_3 sont les deux variables hors base de cette solution ; elles représentent les contraintes actives.



5. La contrainte (4) est redondante et peut donc être omise.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -2, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Solution de la question 2:

Pour obtenir un problème de minimisation, nous multiplions la fonction objectif par -1 :

$$\min 5x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

Pour les contraintes, nous appliquons le changement de variable

$$x_1' = x_1 + 2$$

afin de transformer la contrainte

$$x_1 \geq -2$$

en

$$x_1' \geq 0,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
2x_1' + 4x_2 + 6x_3 &= 11 \\
3x_1' - 5x_2 + 3x_3 &\leq 11 \\
-4x_1' - 9x_2 + 4x_3 &\leq -12 \\
x_1' &\geq 0, \\
0 \leq x_2 &\leq 4, \\
x_3 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Nous introduisons ensuite les variables d'écart afin d'obtenir des contraintes d'égalité :

$$\begin{aligned}
2x_1' + 4x_2 + 6x_3 &= 11 \\
3x_1' - 5x_2 + 3x_3 + e_1 &= 11 \\
-4x_1' - 9x_2 + 4x_3 + e_2 &= -12 \\
x_2 + e_3 &= 4, \\
x_1' &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0, \\
x_3 &\in \mathbb{R} \\
e_1 &\geq 0, \\
e_2 &\geq 0, \\
e_3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Enfin, afin d'imposer à toutes les variables d'être positives ou nulles, nous décomposons

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-,$$

avec $x_3^+ \geq 0$ et $x_3^- \geq 0$, pour obtenir le problème d'optimisation en forme standard :

$$\min 5x_1^{'} - 10 + 3x_2 - 7x_3^+ + 7x_3^-$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
2x_1' + 4x_2 + 6x_3^+ - 6x_3^- &= 11 \\
3x_1' - 5x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + e_1 &= 11 \\
-4x_1' - 9x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- + e_2 &= -12 \\
x_2 + e_3 &= 4, \\
x_1^{'} &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0, \\
x_3^+ &\geq 0, \\
x_3^- &\geq 0, \\
e_1 &\geq 0, \\
e_2 &\geq 0, \\
e_3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Solution de la question 3:

Comme la solution vérifie la contrainte (2), nous avons

$$2 \cdot 1 + 0 + \alpha = 3,$$

et donc $\alpha = 1$. Les contraintes s'écrivent donc

$$\begin{aligned}
1 + 0 &\leq 1, & (1) \\
2 + 0 + 1 &= 3, & (2) \\
1 &\leq 1, & (3) \\
2 &\geq 1, & (4) \\
1 + 3 &\leq 5, & (5) \\
1 &\geq 0, & (6) \\
0 &\geq 0, & (7) \\
1 &\geq 0. & (8)
\end{aligned}$$

Les contraintes actives sont donc (1), (2), (3) et (7).

Solution de la question 4:

Incompatible signifie qu'aucune solution ne vérifie les contraintes. La réponse est donc 0.

Solution de la question 5:

C'est une contrainte redondante.

Solution de la question 6:

Elle doit vérifier toutes les contraintes simultanément.

Solution de la question 7:

Si $B^{-1}b \geq 0$.

Solution de la question 8:

Il a un sommet $(3, 3)$ et est non borné. On peut le voir en particulier car

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vérifie les contraintes pour tout $\lambda \geq 0$.