EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

OPTIMISATION I
GM/EL/CGC/SC/IN
Automne 2012/2013

Corrigé 2

Problème 1

Soient les **variables de décision** suivantes :

- x_1 le nombre de baladeurs MP3 avec radio assemblés par semaine ;
- x_2 le nombre de baladeurs MP3 sans radio assemblés par semaine.

Pierre travaille 2400 minutes par semaine et Paul 1920. On a donc les deux **contraintes** de temps suivantes :

$$7x_1 + 4x_2 \leq 2400,$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 1920.$$

Sachant que l'entreprise dispose de 250 antenne par semaine, on ne peut fabriquer plus de 250 baladeurs avec radio par semaine :

$$x_1 \leq 250.$$

Sachant que 1025 vis sont disponibles par semaine et qu'il faut placer 2 vis sur les baladeurs avec radio et 3 sur ceux sans radio, on exprime la contrainte ainsi :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1025.$$

De plus, le nombre de baladeurs ne peut être que positif :

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Afin de maximiser la prime attribuée aux ouvriers, il faut que le plus petit nombre des types de baladeurs assemblés soit le plus grand possible. La **fonction objectif** à maximiser est donc

$$\min\{x_1, x_2\}.$$

En récapitulant, on obtient le programme mathématique suivant :

$$\begin{array}{llrcrcr}
\text{Maximiser} & z = & \min\{x_1, x_2\} & & & & \\
\text{s.c.} & & 7x_1 & + & 4x_2 & \leq & 2400 \\
 & & 5x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1920 \\
 & & x_1 & & & \leq & 250 \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1025 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Afin de linéariser la fonction objectif, on introduit une variable t telle que :

$$t \leq x_1,$$

$$t \leq x_2,$$

$$t \geq 0.$$

Le programme mathématique sous forme linéaire devient alors :

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Maximiser} & z = & t & & & & & & \\
\text{s.c.} & & 7x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 2400 \\
 & & 5x_1 & + & 5x_2 & & & \leq & 1920 \\
 & & x_1 & & & & & \leq & 250 \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 1025 \\
 & & -x_1 & & & + & t & \leq & 0 \\
 & & & - & x_2 & + & t & \leq & 0 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & t & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème 2

Première formulation
Soit les variables de décision :

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \text{le nombre de tonnes d'abricots achetées chaque jour par l'usine} \\
x_2 & = & \text{le nombre de tonnes de fraises achetées chaque jour par l'usine}
\end{array}
$$

Le programme linéaire à résoudre est donc

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Maximiser} & z = & 2200x_1 & + & 1075x_2 & & \\
\text{s.c.} & & \frac{5}{3}x_1 & & & \leq & 15 \\
 & & & & \frac{5}{4}x_2 & \leq & 10 \\
 & & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{8}x_2 & \leq & 2 \\
 & & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Deuxième formulation
Soit les variables de décision :

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \text{la quantité de gelée d'abricots produite en tonnes} \\
x_2 & = & \text{la quantité de gelée de fraises produite en tonnes}
\end{array}
$$

Le programme linéaire à résoudre est donc :

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 1650x_1 & + & \frac{8600}{3}x_2 & & \\
 & \text{s.c.} & \frac{5}{4}x_1 & & & \leq & 15 \\
 & & & & \frac{10}{3}x_2 & \leq & 10 \\
 & & \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Troisième formulation
Soit les variables de décision :

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \text{tonnes de mélange traitées par la machine A} \\
x_2 & = & \text{tonnes de mélange traitées par la machine B}
\end{array}
$$

Le programme linéaire à résoudre est donc :

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 1320x_1 & + & 860x_2 & & \\
 & \text{s.c.} & x_1 & & & \leq & 15 \\
 & & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & & 0.2x_1 & + & 0.1x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème 3

Soient les variables de décision x_{ij} représentant le nombre de kilos de fromage provenant de la laiterie i et transportés chez le client j avec $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2$.

Le programme linéaire que doit résoudre le fromager s'énonce sous la forme du problème de minimisation suivant :

$$
\begin{array}{llcccccccccccccl}
\text{Minimiser} & z = & 24x_{11} & + & 8x_{12} & + & 21x_{21} & + & 16x_{22} & + & 37x_{31} & + & 17x_{32} & & \\
\text{s.c.} & & x_{11} & & & + & x_{21} & & & + & x_{31} & & & = & 25 \\
& & & & x_{12} & + & & + & x_{22} & & & + & x_{32} & = & 30 \\
& & x_{11} & + & x_{12} & & & & & & & & & \leq & 10 \\
& & & & & & x_{21} & + & x_{22} & & & & & \leq & 20 \\
& & & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & \leq & 40 \\
& & x_{11} & , & x_{12} & , & x_{21} & , & x_{22} & , & x_{31} & , & x_{32} & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème 4

a) $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = 1 - x^2$ est concave:

$\lambda y(x_1) + (1-\lambda)y(x_2) = 1 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2$

$y(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2$

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$y(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda y(x_1) - (1-\lambda)y(x_2) = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$

Ce dont on déduit que y est concave.

b) $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = x^2 - 1$ est convexe:

$\lambda y(x_1) + (1-\lambda)y(x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 - 1$

$y(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 - 1$

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$y(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda y(x_1) - (1-\lambda)y(x_2) = -\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \leq 0$

Ce dont on déduit que y est convexe.

c) La fonction $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est convexe. Il suffit de remarquer que $z(x, y) = \|(x, y)\|_2$ où $\| \, . \, \|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire et d'après l'homogénéité de la norme pour les scalaires positifs:

$z(\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)) \leq \lambda z(x_1, y_1) + (1-\lambda)z(x_2, y_2)$

Problème 5

La fonction $q(x)$ est deux fois continûment différentiable avec $\nabla q(x) = Qx + b$ et $\nabla^2 q(x) = Q$. Afin que $q(x)$ admette un minimum strict, notons-le x^*, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{array}{lll} 1. & \nabla q(x^*) & = 0 \\ 2. & \nabla^2 q(x^*) & \text{doit être définie positive} \end{array}$$

1. $\nabla q(x) = Qx + b \Rightarrow x^*$ est unique car $Qx + b = 0$ admet une solution unique donnée par $x^* = -Q^{-1}b$. Remarquons que Q^{-1} existe puisque Q est définie positive.

2. $\nabla^2 q(x) = Q$ est définie positive par hypothèse. En particulier, $\nabla^2 q(x^*)$ est définie positive.

$$\left.\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array}\right\} \Rightarrow x^* \text{ est le minimum global strict de } q \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Problème 6

(a) L'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ est :

$$x^* = -Q^{-1}b = (x_1^*\ x_2^*\ x_3^*)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

(b) La direction de la plus forte pente pour f en x^0 est par définition :

$$d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problème 7

a)

$$f(a) = 0 \ , \ f(b) = 104 \ , \ \nabla f(a) = (0,0)^T \ , \ \nabla f(b) = (396, 200)^T$$

b)

$\nabla f(a) = 0 \Rightarrow a$ peut être un point extreme.
$\nabla f(b) \neq 0 \Rightarrow b$ ne peut pas être un point extreme.

c)

$$d = (2, -1)^T \implies \nabla f(b)^T \cdot d = 592 > 0$$

Ca veut dire que d est une direction de ascente pas de descente en b.

Problème 8

(a) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - 4) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{array}\right.$$

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-2, 0), (0, 0), (2, 0)\}$. Pour chacun de ces points, déterminons s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point qui n'est ni l'un ni l'autre. Pour cela, nous calculons la matrice Hessienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3x^2-4) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- en $(-2, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant définie positive, $(-2, 0)$ est un minimum local de f.

- en $(0, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant une valeur propre négative et une valeur propre positive, le point $(0, 0)$ correspond à un point de selle de f.

- en $(2, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant définie positive, $(2, 0)$ est un minimum local de f.

Comme $f(-2, 0) = f(2, 0) = 0$ et que f est à valeurs positives, on en déduit que f atteint deux minima globaux en $(-2, 0)$ et en $(2, 0)$.

(b) Le point $(0, 0)$ correspond à un point de selle.

Problème 9

- Le point x_0 ne vérifie pas la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, à savoir $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Ce point n'est donc pas un minimum local de f.
- Pour qu'une direction $d = (d_1, d_2)^T$ soit une direction de descente pour f en x_0, il faut que la condition suivante soit vérifiée :

$$\nabla f(x_0)^T d < 0$$

Cela peut s'écrire :

$$-d_1 + d_2 < 0 \text{ ou encore } d_2 < d_1$$

Par exemple, $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente. Cela correspond à la direction de la plus forte pente $d = -\nabla f(x_0)$.

Problème 10

La fonction f n'a aucun minimum local sur $\mathbb{R}^2$.