Définition du problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & 0, \\ g(x) & \leq & 0, \\ x & \in & X. \end{array}$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 0$
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 0$
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ensemble convexe

Définition du problème

Point admissible

Soit le problème d'optimisation ci-dessus. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit admissible *s'il vérifie toutes les contraintes.*

Analyse des contraintes

- Contraintes actives
- Indépendance linéaire des contraintes
- Directions admissibles
- Elimination des contraintes

Contraintes actives

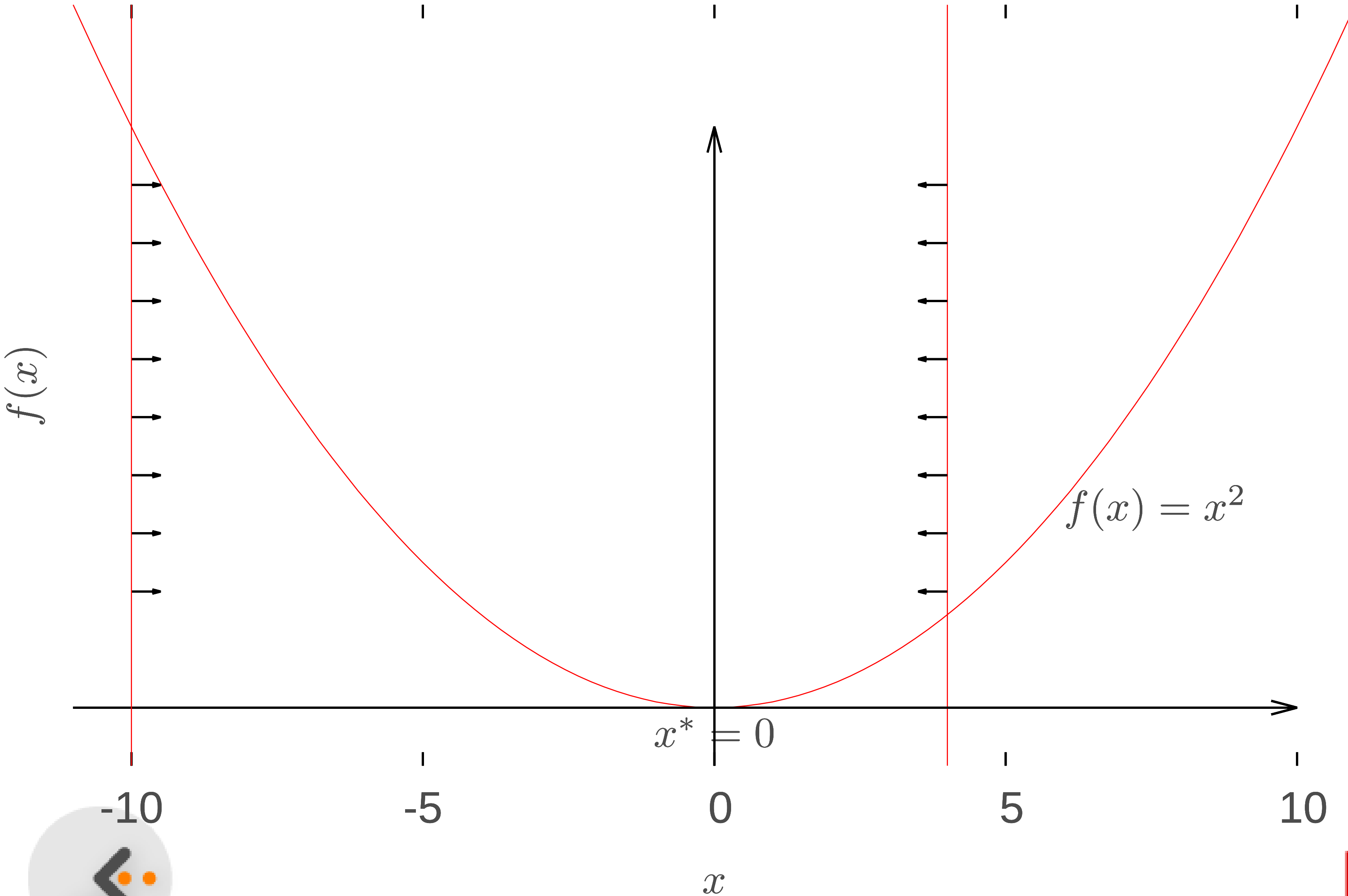
$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

s.c.

$$\begin{aligned} x &\leq 4 \\ x &\geq -10 \end{aligned}$$

Solution : $x^* = 0$

Contraintes actives



Contraintes actives

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

s.c.

$$\begin{aligned} x &\leq 4 \\ x &\geq -10 \end{aligned}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

s.c.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x - 4 \leq 0 \\ g_2(x) &= -x - 10 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ g_1(x^*) &= -4 < 0 \\ g_2(x^*) &= -10 < 0 \end{aligned}$$

Les deux contraintes sont inactives

Contraintes actives

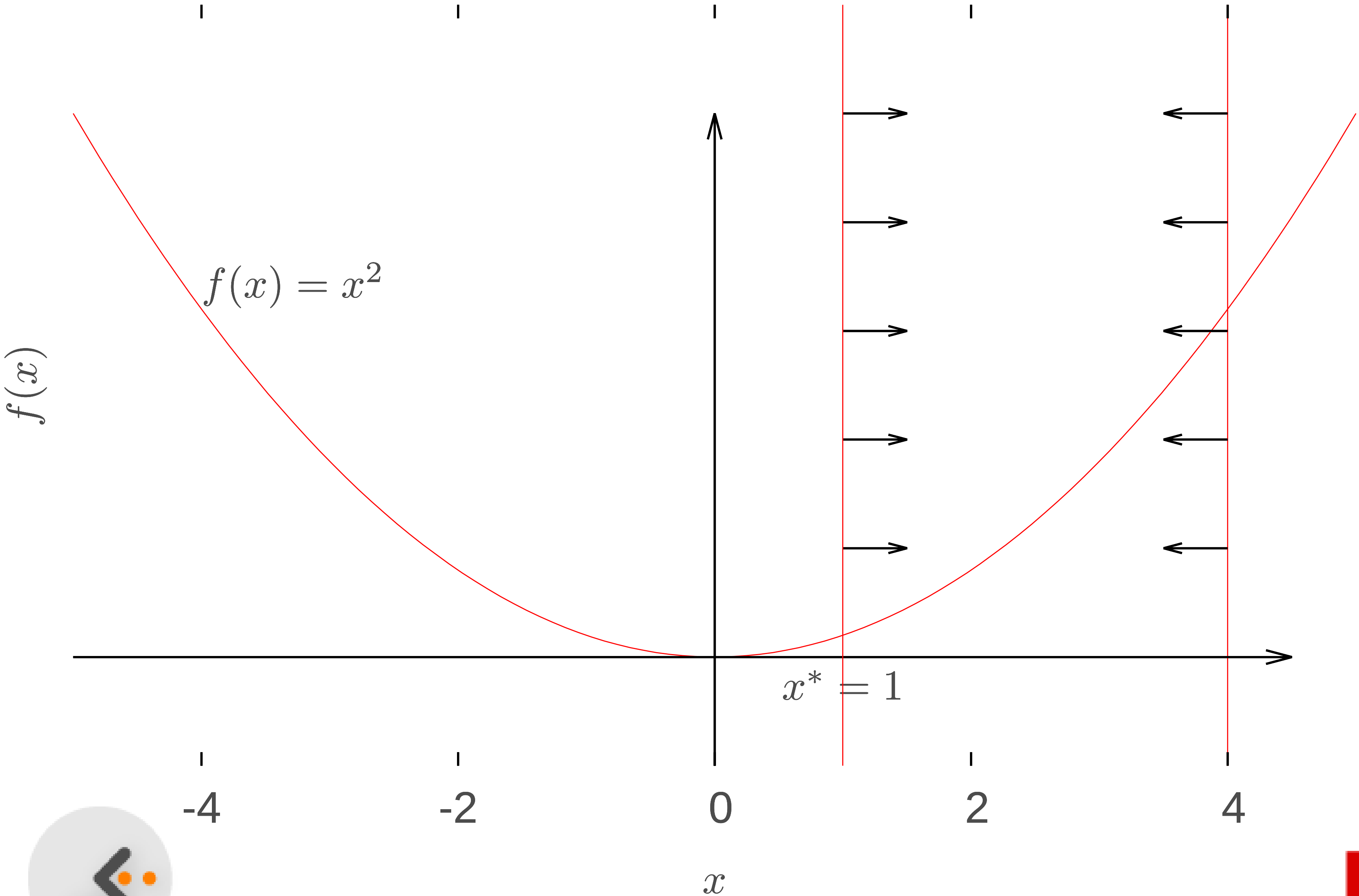
$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

s.c.

$$\begin{aligned} x &\leq 4 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

Solution : $x^* = 1$

Contraintes actives



Contraintes actives

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

s.c.

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & 4 \\ x & \geq & 1 \end{array}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

s.c.

$$\begin{array}{rcccl} g_1(x) & = & x - 4 & \leq & 0 \\ g_2(x) & = & 1 - x & \leq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x^* & = & 1 \\ g_1(x^*) & = & -3 < 0 \\ g_2(x^*) & = & 0 \end{array}$$

g_1 est inactive, g_2 est active

Contraintes actives

Contraintes actives

Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Une contrainte d'inégalité*

$$g(x) \leq 0$$

est dite active *en* x^* *si*

$$g(x^*) = 0,$$

et inactive *en* x^* *si*

$$g(x^*) < 0.$$

Contraintes actives

Contraintes actives (suite)

Par extension, une contrainte d'égalité

$$h(x) = 0$$

sera dite active en x^* *si elle est vérifiée en* x^**, c'est-à-dire si*

$$h(x^*) = 0.$$

L'ensemble des indices des contraintes actives en x^* *sera généralement noté* $\mathcal{A}(x^*)$.

Contraintes actives

Contraintes actives *Soit un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$. Soit le problème d'optimisation P_1,*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sous contraintes

$$g(x) \leq 0,$$

$$x \in Y \subseteq \mathbb{R}^n.$$

avec $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et Y est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

(suite)

Contraintes actives

Contraintes actives (suite) *Si x^* est admissible, c'est-à-dire $g(x^*) \leq 0$, et si $\mathcal{A}(x^*) \subseteq \{1, \ldots, p\}$ est l'ensemble des indices des contraintes actives en x^*, c'est-à-dire*

$$\mathcal{A}(x^*) = \{i | g_i(x^*) = 0\},$$

nous considérons le problème d'optimisation P_2 suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sous contraintes

$$g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{A}(x^*),$$

$$x \in Y \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Alors, x^* est un minimum local de P_1 si et seulement si x^* est un minimum local de P_2.

TRANSP-OR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Contraintes actives

- On peut ignorer les contraintes inactives à la solution
- On peut considérer les contraintes actives à la solution comme des contraintes d’égalité

Indépendance linéaire des contraintes

- Analyse des contraintes très complexe
- Nécessité de définir des hypothèses qui
  - évitent les cas pathologiques,
  - restent générales en pratique.
- Cas linéaire : simple et intuitif
- Cas non linéaire : plus complexe

Contraintes linéaires

$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Système linéaire:

- incompatible, $\nexists x$ tel que $Ax = b$;
- sous-déterminé, un nombre infini de x tels que $Ax = b$
- non singulier, $\exists\ x$ unique qui vérifie $Ax = b$.

Contraintes linéaires

$$\min f(x)$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Système linéaire:

- incompatible, $\nexists x$ tel que $Ax = b$;
- sous-déterminé, un nombre infini de x tels que $Ax = b$
- non singulier, $\exists\, x$ unique qui vérifie $Ax = b$.

Contraintes linéaires

Contraintes redondantes *Soit un système compatible de contraintes d'égalité linéaires $Ax = b$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$.*
Si le rang de A est déficient, c'est-à-dire rang$(A) = r < m$,
alors il existe une matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ de rang plein (i.e. rang($\tilde{A}$) $= r$), composée exclusivement de lignes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ de A telle que

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \Longleftrightarrow Ax = b.$$

où $\tilde{b}$ est composées des éléments $\ell_1, \ldots, \ell_r$ de b.

(p. 63)

Contraintes linéaires

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Système compatible :$(2/3, 0, 1/3, 1/3)$
- rang(A) = 2
- Combinaison linéaire : $a_3 = -2a_1 + 3a_2$

Contraintes linéaires

- On peut supprimer la contrainte 3
- Le système

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

est équivalent à

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\
x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Contraintes linéaires

- On peut toujours supposer que des contraintes linéaires sont linéairement indépendantes.
- Si ce n'est pas le cas, il y a des contraintes redondantes.
- Il suffit de les supprimer.

Contraintes non linéaires

$$h(x) = 0$$

Linéarisation autour de x^+ (Taylor 1er ordre)

$$h(x^+) + \nabla h(x^+)^T(x - x^+) = 0$$

ou encore

$$\nabla h(x^+)^T x = \nabla h(x^+)^T x^+ - h(x^+).$$

avec $\nabla h(x^+) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ou encore

$$Ax = b$$

avec $A = \nabla h(x^+)^T$ et $b = \nabla h(x^+)^T x^+ - h(x^+)$.

Contraintes non linéaires

Les gradients des contraintes d'égalité jouent un rôle similaire aux lignes de la matrice A

Indépendance linéaire des contraintes

Soit le problème d'optimisation $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ *sous contraintes* $h(x)=0$ *et* $g(x)\leq 0$*, et soit un point admissible* x^+*.*

*Nous dirons que la condition d'*indépendance linéaire des contraintes *est vérifiée en* x^+ *si les gradients des contraintes d'égalité et les gradients des contraintes d'inégalité actives en* x^+ *sont linéairement indépendants.*

Par abus de langage, nous dirons parfois simplement que les contraintes sont linéairement indépendantes

Contraintes non linéaires

Soit un problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^2$ avec la contrainte d'inégalité

$$g(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0$$

et la contrainte d'égalité

$$h(x) = x_2 - x_1^2 = 0.$$

Nous avons

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla h(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contraintes non linéaires