EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

OPTIMISATION I
GM/EL/CGC/SC/IN
Automne 2011/2012

Serie 2

Problème 1

Une start-up de produits audio propose à sa clientèle deux types de baladeurs MP3, l'un pouvant capter la radio, l'autre non. Deux ouvriers de l'entreprise, Pierre et Paul, sont spécialisés dans la construction de ces baladeurs. Pierre travaille 40 heures par semaine, alors que Paul est employé à 80 %, soit 32 heures par semaine. Pour assembler un baladeur, il est indispensable que Pierre et Paul y travaillent. Le temps, en minutes, que doit passer chacun des ouvriers pour l'assemblage d'un baladeur est indiqué dans le tableau ci-dessous :

	Pierre	Paul
baladeur avec radio	7 min.	5 min.
baladeur sans radio	4 min.	5 min.

L'entreprise dispose de 250 antennes radio par semaine qu'il faut installer sur les baladeurs MP3 avec radio. De plus sur les baladeurs MP3 avec radio il faut placer 2 vis, alors que sur ceux sans radio il faut en placer 3. Le stock de vis disponibles est de 1025 par semaine.

Le marché est actuellement très favorable pour ce produit. En effet, tous les baladeurs assemblés (avec ou sans radio) sont vendus. De plus, les ouvriers de la start-up touchent une prime dépendant du nombre de baladeurs vendus. Elle est calculée de la manière suivante. Si plus de baladeurs avec radio sont vendus, la prime touchée sera de 1.- par baladeurs vendus sans radio. Par contre, si plus de baladeurs sans radio sont vendus, la prime sera de 1.- par baladeurs vendus avec radio.

Formuler un programme linéaire permettant de maximiser le montant de la prime attribuée aux ouvriers.

Problème 2

Une usine dispose de trois machines A, B et C. La machine A permet de faire de la gelée d'abricots, la machine B de la confiture de fraises et de la gelée de fraises et la machine C traite les déchets produits par A et B.

La machine A est alimentée par un mélange composé à 60% d'abricots et à 40% de sucre et peut traiter au plus 15 tonnes de mélange par jour ; pour une tonne de mélange, elle produit 800kg de gelée et 200kg de déchets.
La machine B est alimentée par un mélange composé à 80% de fraises et à 20% de sucre et peut traiter au plus 10 tonnes de mélange par jour ; pour une tonne de mélange, elle produit 600kg de confiture, 300kg de gelée et 100kg de déchets.
Tous ces déchets doivent être éliminés à l'aide de la machine C qui peut en traiter au plus 2 tonnes par jour.

L'usine achète des abricots, des fraises et du sucre aux prix respectifs de 3000, 3500 et 1200 frs la tonne. Elle vend la tonne de gelée d'abricots à 4500 frs, celle de gelée de fraises à 5000 frs et celle de confiture de fraises à 4000 frs.

On recherche un plan de production journalier maximisant le bénéfice de l'usine.
Formuler ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

INDICATION : la formulation finale ne doit compter que deux variables de décision.

Problème 3

Un fromager possède 3 laiteries où se trouve entreposé du fromage prêt à la vente. Deux clients lui passent commande. Les deux tableaux suivants indiquent l'offre et la demande en kilos de fromage :

laiterie	kilos disponibles
1	10
2	20
3	40

client	kilos demandés
1	25
2	30

Le coût de livraison par kilo de fromage d'une laiterie i chez le client j est représenté par l'élément C_{ij} de la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 21 & 16 \\ 37 & 17 \end{pmatrix}$$

L'objectif du fromager étant de satisfaire la commande tout en minimisant le coût total de transport, énoncer ce problème sous la forme d'un programme linéaire de minimisation.

Problème 4

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout couple de points (x, y) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$.
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est concave si et seulement si pour tout couple de points (x, y) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$.
Une fonction affine, encore appelée linéaire, est à la fois convexe et concave.

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? Lesquelles sont concaves ? Justifier votre réponse.

a) $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = 1 - x^2$

b) $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = x^2 - 1$

c) $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Problème 5

Soit Q une matrice $n \times n$ symétrique, définie positive et soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x + c \qquad \text{(avec } b \in \mathbb{R}^n \text{ et } c \in \mathbb{R}\text{)}$$

Montrer, à l'aide des conditions suffisantes d'optimalité, que cette fonction admet un minimum et que celui-ci est unique.

Problème 6

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x$$

$$\text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = (1\ 1\ 1)^T$$

(a) Trouver (à l'aide du Problème 5) l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer la direction de la plus forte descente au point $x^0 = (0\ 0\ 0)^T$

Problème 7

Soit la fonction $f(\boldsymbol{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ et les points $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ et $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$.

a) Calculer $f(\boldsymbol{a})$, $f(\boldsymbol{b})$, $\nabla f(\boldsymbol{a})$ et $\nabla f(\boldsymbol{b})$.

b) Discuter les conditions d'optimalité en $\boldsymbol{a}$ et en $\boldsymbol{b}$ sur la base des résultats obtenus en a).

c) La direction $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ est-elle une direction de descente en $\boldsymbol{b}$? Justifier.

Problème 8

Pour les deux fonctions ci-dessous, déterminer tous les points stationnaires et, pour chacun d'eux, déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. Justifier en utilisant les conditions d'optimalité.

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2 - x_1^2$

Problème 9

Considérer la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1 + x_2}$$

- Est-ce que $x_0 = (0, 0)^T$ est un minimum local de la fonction f ? Justifier.
- Si oui, est-ce aussi un minimum global? Si non, trouver une direction de descente pour f en x_0.

Problème 10

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + x_2 e^{x_1}$$

Cette fonction admet-elle un minimum local sur $\mathbb{R}^2$?

October 3, 2011 – mth/iva