

# Introduction à la dualité

---

## Autre manière de se débarrasser des contraintes

- Permettre la violation des contraintes
- Associer une pénalité à cette violation
- S'arranger pour que la pénalité n'incite pas à violer la contrainte

# Exemple de l'alpiniste

---

- Un milliardaire offre 1 € à un alpiniste par mètre d'altitude
- Contrainte : rester dans les Alpes
- Solution optimale : grimper sur le Mont Blanc pour 4807 €



# Exemple de l'alpiniste

---

- Les alpinistes aiment la liberté, pas les contraintes
- Si le milliardaire accepte qu'il quitte les Alpes:
- Solution optimale : grimper sur l'Everest pour 8848 €



# Exemple de l'alpiniste

---

- Le milliardaire accepte qu'il quitte les Alpes.
- Mais en s'acquittant d'une amende de 4041 €
- Grimper sur l'Everest rapportera donc  $8848 \text{ €} - 4041 \text{ €} = 4807 \text{ €}$
- Même gain que pour grimper sur le Mont Blanc
- Il n'y a plus intérêt à quitter les Alpes

Question : comment le milliardaire doit-il calculer le prix ?

# Exemple de l'alpiniste

---

## Modélisation

- $x$  est la position (longitude/latitude)
- $f(x)$  est l'altitude en  $x$
- Premier problème :

$$\max_x f(x) \text{ s.c. } x \in \text{Alpes}$$

- Amende:  $a(x)$ , avec  $a(x) = 0$  si  $x \in \text{Alpes}$ .
- Second problème :

$$\max_x f(x) - a(x).$$

# Exemple d'optimisation

---

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$1 - x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale :  $(0, 1)$     Coût optimal : 1

Relaxons la contrainte  $1 - x_1 - x_2 = 0$

# Exemple d'optimisation

---

Amende proportionnelle à la violation :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

sous contraintes

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Quelle valeur donner à  $\lambda$  pour que la solution optimale du problème relaxé ne soit pas meilleure que celle du problème de départ ?

# Exemple d'optimisation

---

$$\lambda = 0$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$x_1 \geq 0$$

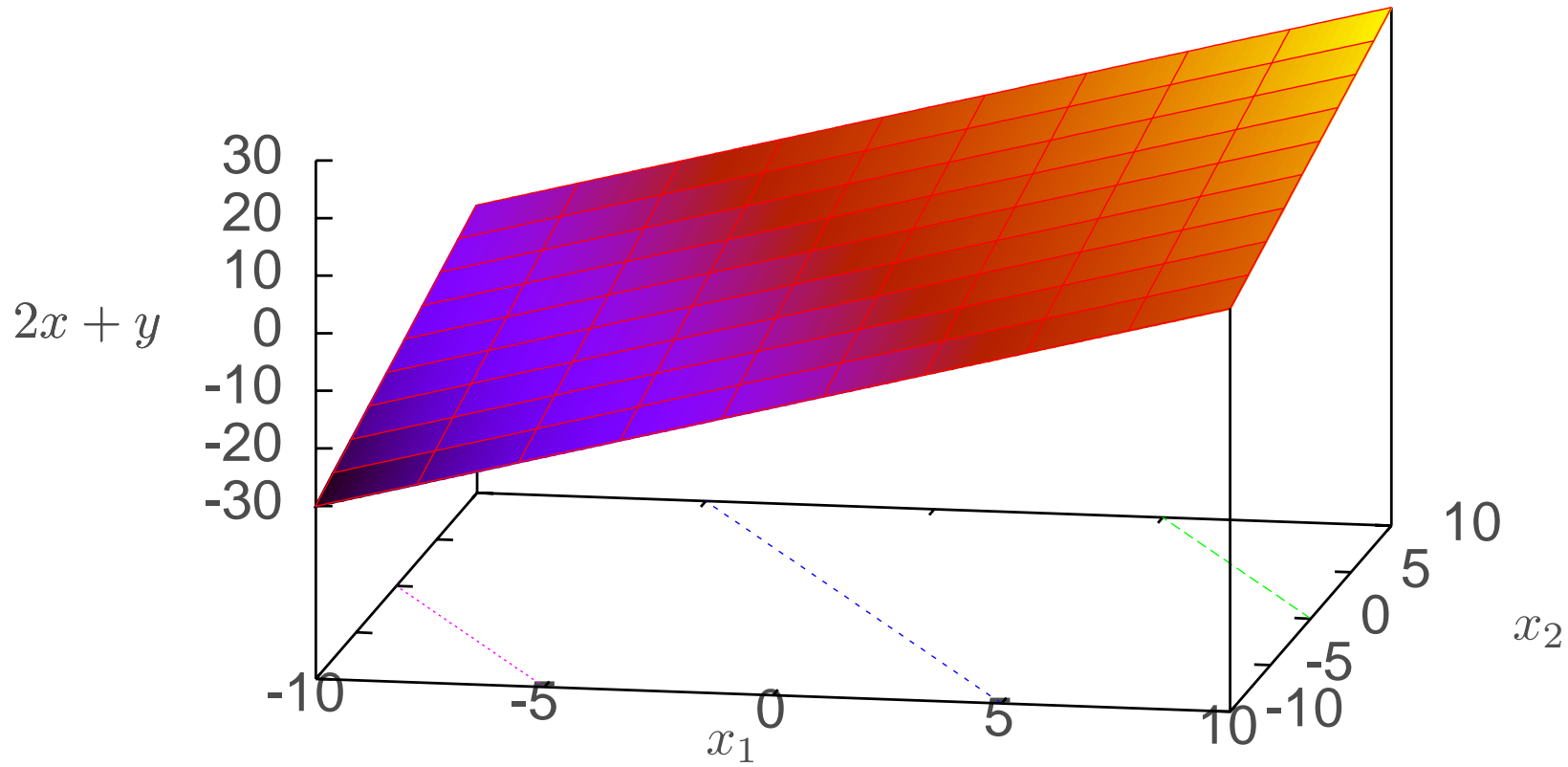
$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale :  $(0, 0)$     Coût optimal : 0

Violation de la contrainte. Mauvais choix de  $\lambda$



# Exemple d'optimisation



# Exemple d'optimisation

---

$$\lambda = 2$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2 - x_2$$

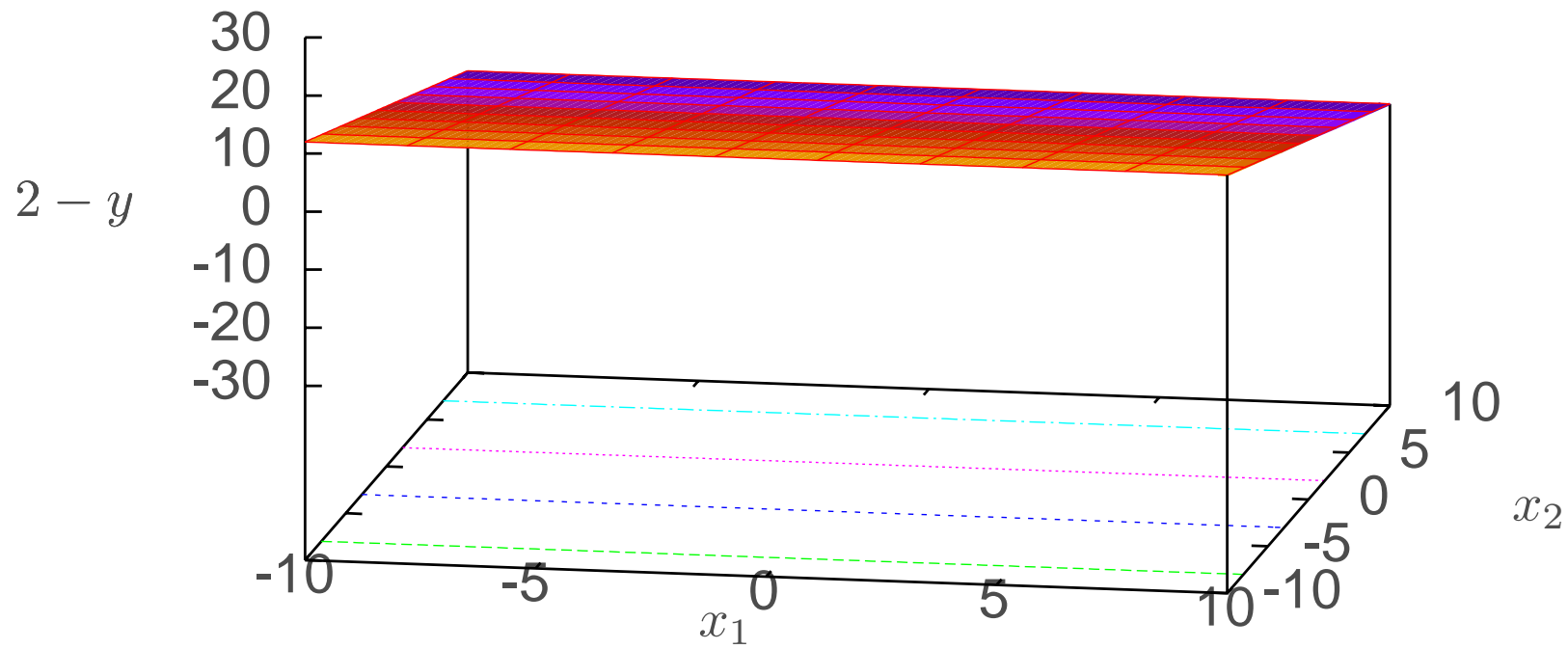
sous contraintes

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Problème non borné. Mauvais choix de  $\lambda$

# Exemple d'optimisation



# Exemple d'optimisation

---

$$\lambda = 1$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 + 1$$

sous contraintes

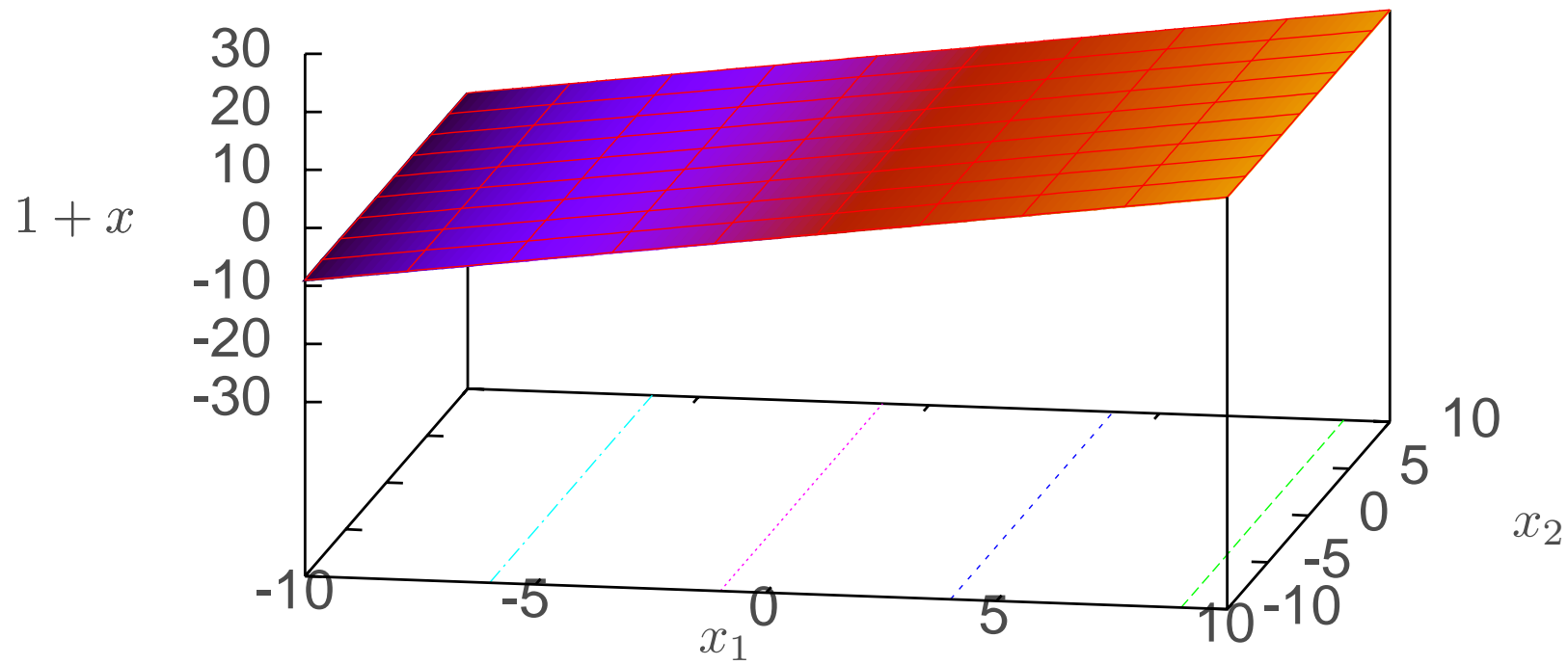
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale :  $(0, x_2)$     Coût optimal : 1

Quel que soit  $x_2$ , même coût optimal. On choisit donc  $x_2 = 1$  pour vérifier la contrainte.

# Exemple d'optimisation



# Fonction lagrangienne

## Fonction lagrangienne

Soit le problème d'optimisation  $\min f(x)$  sous contraintes  $h(x) = 0$  et  $g(x) \leq 0$ , et soient les vecteurs  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  et  $\mu \in \mathbb{R}^p$ .

La fonction  $L : \mathbb{R}^{n+m+p} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x) \end{aligned}$$

est appelée Lagrangien ou fonction lagrangienne du problème.



# Fonction duale

---

Comme dans les exemples, pour chaque valeur de  $\lambda$  et  $\mu$ , on peut minimiser la fonction lagrangienne.

## Fonction duale

Soit le problème d'optimisation  $\min f(x)$  sous contraintes  $h(x) = 0$  et  $g(x) \leq 0$ , et sa fonction lagrangienne  $L(x, \lambda, \mu)$ .

La fonction  $q : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$q(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu)$$

est la fonction duale du problème. Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés variables duales.

# Fonction duale

---

**Borne sur la fonction duale** Soit  $x^*$  solution du problème d'optimisation  $\min f(x)$  sous contraintes  $h(x) = 0$  et  $g(x) \leq 0$ , et soit  $q(\lambda, \mu)$  la fonction duale du même problème.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  et  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \geq 0$ .

Alors,

$$q(\lambda, \mu) \leq f(x^*),$$

et la fonction duale fournit des bornes inférieures sur la valeur optimale du problème.

(p.113)



# Problème dual

---

Comment choisir  $\lambda$  et  $\mu$  ?

- Eviter que le problème relaxé (i.e. le calcul de la fonction duale) soit non borné.
- Eviter, dans la mesure du possible, que

$$q(\lambda, \mu) < f(x^*)$$

avec

$$x^* = \operatorname{argmin}_x L(x, \lambda, \mu).$$

# Problème dual

## Problème dual

Soit le problème d'optimisation  $\min f(x)$  sous contraintes  $h(x) = 0$  et  $g(x) \leq 0$  et sa fonction duale  $q(\lambda, \mu)$ .

Soit  $X_q \subseteq \mathbb{R}^{m+p}$  le domaine de  $q$ , c'est-à-dire

$$X_q = \{\lambda, \mu \mid q(\lambda, \mu) > -\infty\}$$

Le problème d'optimisation

$$\max_{\lambda, \mu} q(\lambda, \mu) \text{ s.c. } \mu \geq 0 \text{ et } (\lambda, \mu) \in X_q$$

est le problème dual du problème d'optimisation.

Dans ce contexte, le problème de départ s'appelle problème primal.

# Exemple

---

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 1 - x_1 - x_2 = 0 & (\lambda) \\ g_1(x) &= -x_1 \leq 0 & (\mu_1) \\ g_2(x) &= -x_2 \leq 0 & (\mu_2) \end{aligned}$$

Fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) &= 2x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2) - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 \\ &= (2 - \lambda - \mu_1)x_1 + (1 - \lambda - \mu_2)x_2 + \lambda \end{aligned}$$

# Exemple

---

Pour que la fonction duale soit bornée, il faut que les coefficients de  $x_1$  et  $x_2$  soient nuls, et donc

$$2 - \lambda - \mu_1 = 0, \quad 1 - \lambda - \mu_2 = 0,$$

ou encore

$$\mu_1 = 2 - \lambda, \quad \mu_2 = 1 - \lambda.$$

Comme  $\mu_1 \geq 0$ , il faut que  $\lambda \leq 2$ . Comme  $\mu_2 \geq 0$ , il faut que  $\lambda \leq 1$ .

# Exemple

---

Ainsi,

$$X_q = \{\lambda, \mu_1, \mu_2 \mid \lambda \leq 1, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0\}$$

et la fonction duale devient

$$q(\lambda, \mu_1, \mu_2) = \lambda.$$

# Exemple

---

Le problème dual s'écrit

$$\max \lambda \text{ s.c. } \lambda \leq 1, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0,$$

dont la solution optimale est  $\lambda^* = 1$ . Comme

$$\mu_1 = 2 - \lambda, \quad \mu_2 = 1 - \lambda.$$

on a  $\mu_1^* = 1$  et  $\mu_2^* = 0$ .

# Dualité faible

---

**Dualité faible** Soit  $x^*$  solution du problème primal et soit  $(\lambda^*, \mu^*)$  solution optimale du problème dual associé.

Alors

$$q(\lambda^*, \mu^*) \leq f(x^*)$$

(Corollaire de la borne duale – p.116)

# Problème dual

---

**Concavité-convexité du problème dual** Soit le problème dual  $\max_{\lambda, \mu} q(\lambda, \mu)$  s.c.  $\mu \geq 0$  et  $(\lambda, \mu) \in X_q$  d'un problème d'optimisation. Alors, la fonction objectif est concave, et le domaine de la fonction duale est convexe.

(p. 116)



# Dualité en optimisation linéaire

---

$$\min_x c^T x$$

sous contraintes

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

et donc, nous avons

$$h(x) = b - Ax$$

et

$$g(x) = -x.$$

# Dualité en optimisation linéaire

---

Fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned}L(x, \lambda, \mu) &= c^T x + \lambda^T (b - Ax) - \mu^T x \\ &= (c - A^T \lambda - \mu)^T x + \lambda^T b.\end{aligned}$$

Pour qu'elle soit bornée, il faut

$$c - A^T \lambda - \mu = 0.$$

Ainsi,

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda^T b \quad \forall x, \mu$$

et donc

$$q(\lambda, \mu) = \min_x L(x, \lambda, \mu) = \lambda^T b.$$

# Dualité en optimisation linéaire

---

Le problème dual s'écrit

$$\max_{\lambda, \mu} \lambda^T b$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ \mu &= c - A^T \lambda. \end{aligned}$$

- Eliminer  $\mu$
- Renommer  $\lambda$  en  $x$
- Changer la maximisation en minimisation.

# Dualité en optimisation linéaire

---

On obtient

$$\min_x -b^T x$$

sous contraintes

$$A^T x \leq c.$$

**C'est aussi un problème d'optimisation linéaire**

Calculons son dual...

Fonction Lagrangienne :

$$\begin{aligned} L(x, \mu) &= -b^T x + \mu^T (A^T x - c) \\ &= (-b + A\mu)^T x - \mu^T c \end{aligned}$$

# Dualité en optimisation linéaire

---

Pour qu'elle soit bornée, il faut

$$-b + A\mu = 0$$

# Dualité en optimisation linéaire

---

Ainsi,

$$L(x, \mu) = -\mu^T c \quad \forall x$$

et donc

$$q(\mu) = -\mu^T c.$$

Le problème dual s'écrit

$$\max_{\mu} -\mu^T c$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ A\mu &= b. \end{aligned}$$

# Dualité en optimisation linéaire

---

ou encore

$$\min_x x^T c$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &= b. \end{aligned}$$

C'est le problème de départ

# Dualité en optimisation linéaire

---

Soit le programme linéaire suivant

$$\min_x c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3$$

sous contraintes

$$A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 = b_1$$

$$A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 \leq b_2$$

$$A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 \geq b_3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$$



# Dualité en optimisation linéaire

Le dual de ce problème est

$$\max_{\gamma} \gamma^T b = \gamma_1^T b_1 + \gamma_2^T b_2 + \gamma_3^T b_3$$

$$\gamma_1 \in \mathbb{R}^m$$

$$\gamma_2 \leq 0$$

$$\gamma_3 \geq 0$$

$$(\gamma_1^T A_1 + \gamma_2^T A_2 + \gamma_3^T A_3 =) \quad \gamma^T A \leq c_1$$

$$(\gamma_1^T B_1 + \gamma_2^T B_2 + \gamma_3^T B_3 =) \quad \gamma^T B \geq c_2$$

$$(\gamma_1^T C_1 + \gamma_2^T C_2 + \gamma_3^T C_3 =) \quad \gamma^T C = c_3$$

avec  $\gamma = (\gamma_1^T \ \gamma_2^T \ \gamma_3^T)^T$  et  $A = (A_1^T \ A_2^T \ A_3^T)^T$

# Dualité en optimisation linéaire

---

- A chaque contrainte du primal correspond une variable duale

Contrainte = variable duale libre

Contrainte  $\leq$  variable duale  $\leq 0$

Contrainte  $\geq$  variable duale  $\geq 0$

- A chaque variable primale correspond une contrainte duale

variable primale  $\geq 0$       contrainte  $\leq$

variable primale  $\leq 0$       contrainte  $\geq$

variable primale libre      contrainte =

# Dualité en optimisation linéaire

---

**Le dual du dual est le primal** Soit un problème (primal) d'optimisation linéaire.

*Si l'on transforme son dual en un problème de minimisation, et que l'on calcule le dual de celui-ci, on obtient un problème équivalent au problème primal*

(p. 121)

# Dualité en optimisation linéaire

---

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sous contraintes

$$-x_1 + 3x_2 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6$$

$$x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

# Dualité en optimisation linéaire

---

Le problème dual est

$$\max 5\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_1 & & & \in & \mathbb{R} \\ & \gamma_2 & & \geq & 0 \\ & & \gamma_3 & \leq & 0 \\ -\gamma_1 & + & 2\gamma_2 & \leq & 1 \\ 3\gamma_1 & - & \gamma_2 & \geq & 2 \\ & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 3 \end{array}$$

C'est également un problème linéaire.

# Dualité en optimisation linéaire

Ecrivons-le comme un problème de minimisation, et renommons les variables  $x$ .

$$\min -5x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

$$x_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \leq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$-3x_1 + x_2 \leq -2$$

$$-3x_2 - x_3 = -3$$

On peut donc calculer sont dual.

# Dualité en optimisation linéaire

$$\max -\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccccc} \gamma_1 & - & 3\gamma_2 & & & = & -5 \\ -2\gamma_1 & + & \gamma_2 & - & 3\gamma_3 & \leq & -6 \\ & & & - & \gamma_3 & \geq & -4 \\ \gamma_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & \gamma_2 & & & \leq & 0 \\ & & & & \gamma_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

C'est le problème de départ