
Introduction à la dualité

Michel Bierlaire

`michel.bierlaire@epfl.ch`

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

Introduction à la dualité

Comment se débarrasser des contraintes

- Permettre la violation des contraintes
- Associer une pénalité à cette violation
- S'arranger pour que la pénalité n'incite pas à violer la contrainte

Exemple de l'alpiniste

- Un milliardaire offre 1 € à un alpiniste par mètre d'altitude
- Contrainte : rester dans les Alpes
- Solution optimale : grimper sur le Mont Blanc pour 4807 €



Exemple de l'alpiniste

- Les alpinistes aiment la liberté, pas les contraintes
- Si le milliardaire accepte qu'il quitte les Alpes:
- Solution optimale : grimper sur l'Everest pour 8848 €



Exemple de l'alpiniste

- Le milliardaire accepte qu'il quitte les Alpes.
- Mais en s'acquittant d'une amende de 4041 €
- Grimper sur l'Everest rapportera donc $8848 \text{ €} - 4041 \text{ €} = 4807 \text{ €}$
- Même gain que pour grimper sur le Mont Blanc
- Il n'y a plus intérêt à quitter les Alpes

Question : comment le milliardaire doit-il calculer le prix ?

Exemple de l'alpiniste

Modélisation

- x est la position (longitude/latitude)
- $f(x)$ est l'altitude en x
- Premier problème :

$$\max_x f(x) \text{ s.c. } x \in \text{Alpes}$$

- Amende: $a(x)$, avec $a(x) = 0$ si $x \in \text{Alpes}$.
- Second problème :

$$\max_x f(x) - a(x).$$

Exemple d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$1 - x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale : $(0, 1)$ Coût optimal : 1

Relaxons la contrainte $1 - x_1 - x_2 = 0$

Exemple d'optimisation

Amende proportionnelle à la violation :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

sous contraintes

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Quelle valeur donner à λ pour que la solution optimale du problème relaxé ne soit pas meilleure que celle du problème de départ ?

Exemple d'optimisation

$$\lambda = 0$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

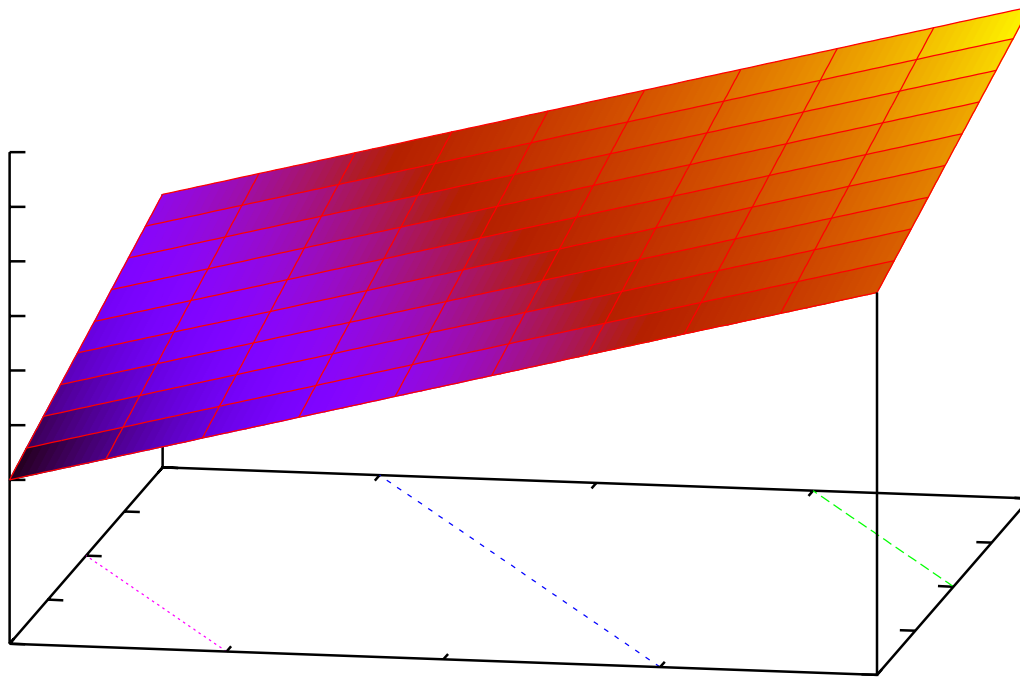
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale : $(0, 0)$ Coût optimal : 0

Violation de la contrainte. Mauvais choix de λ

Exemple d'optimisation



Exemple d'optimisation

$$\lambda = 2$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2 - x_2$$

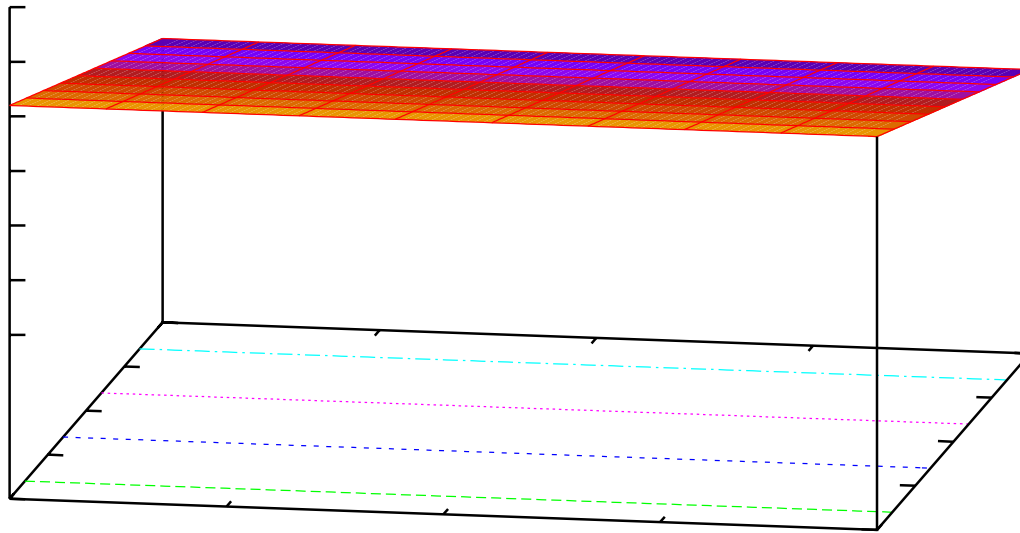
sous contraintes

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Problème non borné. Mauvais choix de λ

Exemple d'optimisation



Exemple d'optimisation

$$\lambda = 1$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 + 1$$

sous contraintes

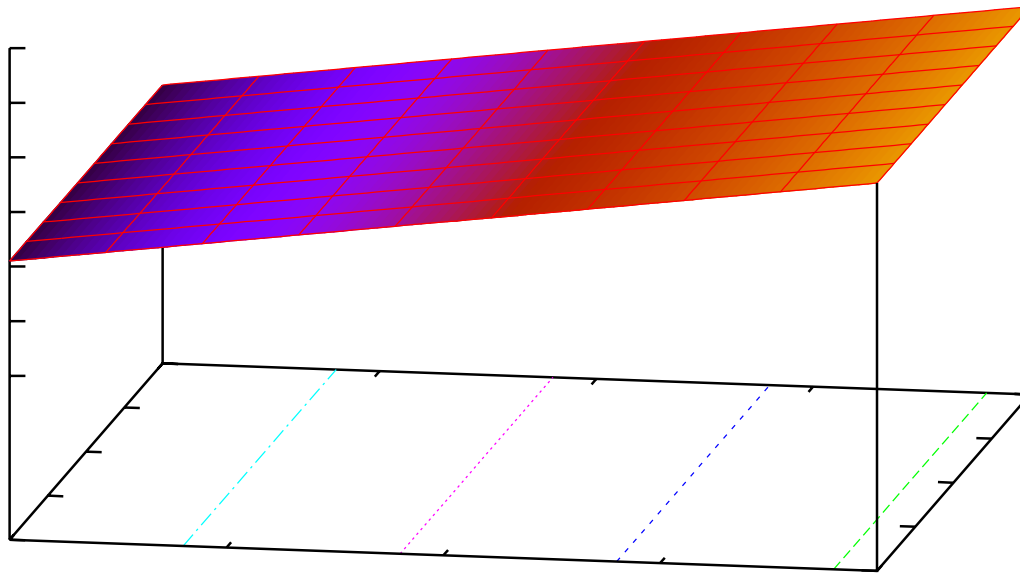
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale : $(0, x_2)$ Coût optimal : 1

Quel que soit x_2 , même coût optimal. On choisit donc $x_2 = 1$ pour vérifier la contrainte.

Exemple d'optimisation



Fonction lagrangienne

Fonction lagrangienne

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ sous contraintes $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$, et soient les vecteurs $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$. La fonction $L : \mathbb{R}^{n+m+p} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x) \end{aligned}$$

est appelée Lagrangien ou fonction lagrangienne du problème.



Fonction duale

Comme dans les exemples, pour chaque valeur de λ et μ , on peut minimiser la fonction lagrangienne.

Fonction duale

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ sous contraintes $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$, et sa fonction lagrangienne $L(x, \lambda, \mu)$. La fonction $q : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu)$$

est la fonction duale du problème. Les paramètres λ et μ sont appelés variables duales.

Fonction duale

Borne sur la fonction duale Soit x^* solution du problème d'optimisation $\min f(x)$ sous contraintes $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$, et soit $q(\lambda, \mu)$ la fonction duale du même problème. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\mu \geq 0$. Alors,

$$q(\lambda, \mu) \leq f(x^*),$$

et la fonction duale fournit des bornes inférieures sur la valeur optimale du problème.

(p.113)

Preuve

$$\begin{aligned} q(\lambda, \mu) &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu) \\ &\leq L(x^*, \lambda, \mu) \\ &= f(x^*) + \lambda^T h(x^*) + \mu^T g(x^*) \\ &= f(x^*) + \mu^T g(x^*) \\ &\leq f(x^*). \end{aligned}$$

par définition

par définition

car x^* vérifie les contr.
d'égalité

car x^* vérifie les contr.
d'inégalité et $\mu \geq 0$

Problème dual

Comment choisir λ et μ ?

- Eviter que le problème relaxé (i.e. le calcul de la fonction duale) soit non borné.
- Eviter, dans la mesure du possible, que

$$q(\lambda, \mu) < f(x^*)$$

avec x^* solution du problème de départ.

Problème dual

Problème dual

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ sous contraintes $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$ et sa fonction duale $q(\lambda, \mu)$. Soit $X_q \subseteq \mathbb{R}^{m+p}$ le domaine de q , c'est-à-dire

$$X_q = \{\lambda, \mu \mid q(\lambda, \mu) > -\infty\}$$

Le problème d'optimisation

$$\max_{\lambda, \mu} q(\lambda, \mu) \text{ s.c. } \mu \geq 0 \text{ et } (\lambda, \mu) \in X_q$$

est le problème dual du problème d'optimisation. Dans ce contexte, le problème de départ s'appelle problème primal.

Exemple

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 1 - x_1 - x_2 = 0 & (\lambda) \\ g_1(x) &= -x_1 \leq 0 & (\mu_1) \\ g_2(x) &= -x_2 \leq 0 & (\mu_2) \end{aligned}$$

Fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) &= 2x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2) - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 \\ &= (2 - \lambda - \mu_1)x_1 + (1 - \lambda - \mu_2)x_2 + \lambda \end{aligned}$$

Exemple

Pour que la fonction duale soit bornée, il faut que les coefficients de x_1 et x_2 soient nuls, et donc

$$2 - \lambda - \mu_1 = 0, \quad 1 - \lambda - \mu_2 = 0,$$

ou encore

$$\mu_1 = 2 - \lambda, \quad \mu_2 = 1 - \lambda.$$

Comme $\mu_1 \geq 0$, il faut que $\lambda \leq 2$. Comme $\mu_2 \geq 0$, il faut que $\lambda \leq 1$.

Exemple

Ainsi,

$$X_q = \{\lambda, \mu_1, \mu_2 \mid \lambda \leq 1, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0\}$$

et la fonction duale devient

$$q(\lambda, \mu_1, \mu_2) = \lambda.$$

Exemple

Le problème dual s'écrit

$$\max \lambda \text{ s.c. } \lambda \leq 1, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0,$$

dont la solution optimale est $\lambda^* = 1$. Comme

$$\mu_1 = 2 - \lambda, \quad \mu_2 = 1 - \lambda.$$

on a $\mu_1^* = 1$ et $\mu_2^* = 0$.

Dualité faible

Dualité faible Soit x^* solution du problème primal et soit (λ^*, μ^*) solution optimale du problème dual associé. Alors

$$q(\lambda^*, \mu^*) \leq f(x^*)$$

(Corollaire de la borne duale – p.116)

Problème dual

Concavité-convexité du problème dual Soit le problème dual $\max_{\lambda, \mu} q(\lambda, \mu)$ s.c. $\mu \geq 0$ et $(\lambda, \mu) \in X_q$ d'un problème d'optimisation. Alors, la fonction objectif est concave, et le domaine de la fonction duale est convexe.

(p. 116)

Dualité en optimisation linéaire

$$\min_x c^T x$$

sous contraintes

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

et donc, nous avons

$$h(x) = b - Ax$$

et

$$g(x) = -x.$$

Dualité en optimisation linéaire

Fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned}L(x, \lambda, \mu) &= c^T x + \lambda^T (b - Ax) - \mu^T x \\ &= (c - A^T \lambda - \mu)^T x + \lambda^T b.\end{aligned}$$

Pour qu'elle soit bornée, il faut

$$c - A^T \lambda - \mu = 0.$$

Ainsi,

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda^T b \quad \forall x, \mu$$

et donc

$$q(\lambda, \mu) = \min_x L(x, \lambda, \mu) = \lambda^T b.$$

Dualité en optimisation linéaire

Le problème dual s'écrit

$$\max_{\lambda, \mu} \lambda^T b$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ \mu &= c - A^T \lambda. \end{aligned}$$

- Eliminer μ
- Renommer λ en x
- Changer la maximisation en minimisation.

Dualité en optimisation linéaire

On obtient

$$\min_x -b^T x$$

sous contraintes

$$A^T x \leq c.$$

C'est aussi un problème d'optimisation linéaire

Calculons son dual...

Fonction Lagrangienne :

$$\begin{aligned} L(x, \mu) &= -b^T x + \mu^T (A^T x - c) \\ &= (-b + A\mu)^T x - \mu^T c \end{aligned}$$

Dualité en optimisation linéaire

Pour qu'elle soit bornée, il faut

$$-b + A\mu = 0$$

Dualité en optimisation linéaire

Ainsi,

$$L(x, \mu) = -\mu^T c \quad \forall x$$

et donc

$$q(\mu) = -\mu^T c.$$

Le problème dual s'écrit

$$\max_{\mu} -\mu^T c$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ A\mu &= b. \end{aligned}$$

Dualité en optimisation linéaire

ou encore

$$\min_x x^T c$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &= b. \end{aligned}$$

C'est le problème de départ

Dualité en optimisation linéaire

Soit le programme linéaire suivant

$$\min_x c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3$$

sous contraintes

$$A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 = b_1$$

$$A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 \leq b_2$$

$$A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 \geq b_3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$$

Dualité en optimisation linéaire

Le dual de ce problème est

$$\max_{\gamma} \gamma^T b = \gamma_1^T b_1 + \gamma_2^T b_2 + \gamma_3^T b_3$$

$$\gamma_1 \in \mathbb{R}^m$$

$$\gamma_2 \leq 0$$

$$\gamma_3 \geq 0$$

$$(\gamma_1^T A_1 + \gamma_2^T A_2 + \gamma_3^T A_3 =) \quad \gamma^T A \leq c_1$$

$$(\gamma_1^T B_1 + \gamma_2^T B_2 + \gamma_3^T B_3 =) \quad \gamma^T B \geq c_2$$

$$(\gamma_1^T C_1 + \gamma_2^T C_2 + \gamma_3^T C_3 =) \quad \gamma^T C = c_3$$

avec $\gamma = (\gamma_1^T \ \gamma_2^T \ \gamma_3^T)^T$ et $A = (A_1^T \ A_2^T \ A_3^T)^T$

Dualité en optimisation linéaire

- A chaque contrainte du primal correspond une variable duale

Contrainte = variable duale libre

Contrainte \leq variable duale ≤ 0

Contrainte \geq variable duale ≥ 0

- A chaque variable primale correspond une contrainte duale

variable primale ≥ 0 contrainte \leq

variable primale ≤ 0 contrainte \geq

variable primale libre contrainte =

Dualité en optimisation linéaire

Le dual du dual est le primal Soit un problème (primal) d'optimisation linéaire. Si l'on transforme son dual en un problème de minimisation, et que l'on calcule le dual de celui-ci, on obtient un problème équivalent au problème primal

(p. 121)

Dualité en optimisation linéaire

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccccl} -x_1 & + & 3x_2 & & & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 6 \\ & & & & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \leq & 0 \\ & & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Dualité en optimisation linéaire

Le problème dual est

$$\max 5\gamma_1 + 6\gamma_2 + 4\gamma_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_1 & & & \in & \mathbb{R} \\ & \gamma_2 & & \geq & 0 \\ & & \gamma_3 & \leq & 0 \\ -\gamma_1 & + & 2\gamma_2 & \leq & 1 \\ 3\gamma_1 & - & \gamma_2 & \geq & 2 \\ & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 3 \end{array}$$

C'est également un problème linéaire.

Dualité en optimisation linéaire

Ecrivons-le comme un problème de minimisation, et renommons les variables x .

$$\min -5x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

$$x_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \leq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$-3x_1 + x_2 \leq -2$$

$$-3x_2 - x_3 = -3$$

On peut donc calculer son dual.

Dualité en optimisation linéaire

$$\max -\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcccccc} \gamma_1 & - & 3\gamma_2 & & = & -5 \\ -2\gamma_1 & + & \gamma_2 & - & 3\gamma_3 & \leq -6 \\ & & & - & \gamma_3 & \geq -4 \\ \gamma_1 & & & & \geq & 0 \\ & & \gamma_2 & & \leq & 0 \\ & & & & \gamma_3 & \in \mathbb{R} \end{array}$$

C'est le problème de départ