

SÉRIE D'EXERCICES 11

- Problème-type :

- Problèmes à résoudre :
1) 2)

- Problèmes supplémentaires :

Problème 1

Une chaîne de télévision veut dépêcher un envoyé spécial pour couvrir l'actualité dans chacune des trois zones de conflit suivantes : Tchétchénie, Liberia et Burundi. Elle dispose de quatre journalistes prêts à se rendre dans certains de ces pays pour autant qu'ils reçoivent une prime de risque.

Journaliste	Pays (Prime)
1	Tchétchénie (8) et Liberia (10)
2	Tchétchénie (10) et Burundi (13)
3	Liberia (12) et Burundi (12)
4	Tchétchénie (9) et Burundi (12)

Modéliser le problème de l'affectation à coût minimum d'un journaliste à chacun des trois pays sous la forme d'un problème de transbordement.

Problème 2

Soit le problème de sac-à-dos binaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 13x_1 + 16x_2 + 7x_3 + 4x_4 \\ \text{s.c.} \quad &6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 12 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème à l'aide de la méthode de séparation et d'évaluation (branch and bound), décrivons les deux phases :

ÉVALUATION. Pour la phase d'évaluation, on va résoudre la relaxation linéaire du problème, c'est-à-dire le programme linéaire obtenu en remplaçant les contraintes $x_i \in \{0, 1\} \forall i$ par $0 \leq x_i \leq 1 \forall i$. Pour résoudre cette relaxation, on va appliquer un algorithme glouton : on considère les objets par ordre décroissant de leur rendement $\rho_i = c_i/a_i$.

Objet i	1	2	3	4
Utilité c_i	13	16	7	4
Poids a_i	6	8	4	3
$\rho_i = c_i/a_i$	2.16	2	1.75	1.3

Ici, on va les considérer dans l'ordre donné.

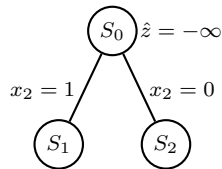
SÉPARATION. Si la solution de la relaxation linéaire n'est pas entière, on crée deux sous-problèmes en posant, dans l'un, $x_j = 1$ et, dans l'autre, $x_j = 0$ où x_j est la variable fractionnaire dans la solution de la relaxation linéaire.

INITIALISATION. L'arbre d'énumération ne contient que la racine S_0 représentant le problème initial. $\hat{z} = -\infty$. (Attention, on maximise!)

PREMIÈRE ITÉRATION. On évalue une borne supérieure \bar{z}_0 pour S_0 :

$$x_1 = 1, x_2 = 6/8, x_3 = 0, x_4 = 0 \quad \bar{z}_0 = 25.$$

La solution n'est pas entière et $\bar{z}_0 > \hat{z}$. On sépare S_0 en créant deux sous-problèmes, avec respectivement, $x_2 = 1$ et $x_2 = 0$.



- 1) Poursuivre la résolution de ce problème en commençant par traiter le sommet S_1 .
- 2) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier vos réponses.
 - a) En programmation linéaire en nombres entiers, la méthode de branch-and-bound s'arrête dès qu'elle a trouvé une solution optimale du problème.
 - b) Pour que l'algorithme du Branch and Bound garantisse l'optimalité d'une solution, il doit énumérer toutes les solutions admissibles.